Álgebra Lineal

Segundo cuatrimestre - 2024

Práctica 3

Determinante

Ejercicio 1. Calcule el determinante de cada una de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

pruebe que no existe una matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $A \cdot C = C \cdot B$.

Ejercicio 3. Pruebe que si $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior, entonces $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.

Ejercicio 4. Calcule el determinante de la siguiente matriz de $\mathbb{k}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.

i) Sean $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{k}^{m\times m}$ y $C \in \mathbb{k}^{n\times m}$, y consideremos la siguiente matriz de $\mathbb{k}^{(n+m)\times(n+m)}$ dada por bloques:

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Pruebe que $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$.

ii) Sean $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ y $A_i \in \mathbb{k}^{r_i\times r_i}$ para cada $i \in \{1 \dots n\}$. Calcule el determinante de

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Calcule el determinante de cada una de las siguientes matrices:

I) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ II) $\begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}$ III) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7. Calcule inductivamente el determinante de la siguiente matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8 (Matrices de Vandermonde)**.** Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}$. Se define la *matriz de Vandermonde* de estos escalares como

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pruebe que

$$\det(V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Sugerencia: *Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Considerando el determinante de $V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, X)$ como un polinomio en X, pruebe que $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ son sus raíces y factorícelo.*

Ejercicio 9. Calcule los siguientes determinantes:

I) $\begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix}$ II) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ distintos dos a dos. Pruebe que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deduzca que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.
Sugerencia: *derive $n-1$ veces la función $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.*

Ejercicio 11. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, consideramos un vector $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n}) \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que la función $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \dots & v_{n-1,n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

Ejercicio 12. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ y sea $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\det(A+B) = \det(A-B)$. Pruebe que B es inversible si y solo si $b_{11} \neq b_{21}$.

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $\det(A) = \pm 1$. Pruebe que para todo $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, existe un único $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que $A \cdot x = b$.

Ejercicio 14. Sea $\Bbbk$ un cuerpo.

I) Sea $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3} \in \Bbbk^{3\times 3}$ no inversible tal que $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \neq 0$. Determine la dimensión de $S = \{x \in \Bbbk^3 : A \cdot x = 0\}$.

II) Sea $A \in \Bbbk^{n\times n}$ no inversible tal que $\operatorname{adj}(A) \neq 0$. Calcule $\operatorname{rg}(A)$ y $\operatorname{rg}(\operatorname{adj}(A))$.