

Álgebra Lineal

Segundo cuatrimestre - 2024

Práctica 2

Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determine cuáles de las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

(I) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2);$

(II) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|);$

(III) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$ (considerando a \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial);

(IV) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}, f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix};$

(V) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3, f(p) = (p(0), p'(0), p''(0)).$

Ejercicio 2. Interprete geoméricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(I) $f(x, y) = (x, 0);$

(II) $f(x, y) = (x, -y);$

(III) $f(x, y) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y \cos t).$

Ejercicio 3. Encuentre una función $f : V \rightarrow V$ (para un \mathbb{k} -espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores $v, w \in V$ pero que no sea una transformación lineal. Análogamente, encuentre una función $g : V \rightarrow V$ que cumpla $g(\lambda v) = \lambda g(v)$ para cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{k}$ y cualquier vector $v \in V$, pero que no sea una transformación lineal.

Ejercicio 4.

(I) Pruebe que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f , determine $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

(II) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6), f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

(III) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (1, 2, 1), & f(2, 1, 0) &= (2, 1, 0), & f(-1, 0, 0) &= (1, 2, 1), \\ g(1, 1, 1) &= (1, 1, 0), & g(3, 2, 1) &= (0, 0, 1), & g(2, 2, -1) &= (3, -1, 2). \end{aligned}$$

Determine si $f = g$.

(IV) Halle todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1), f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

- (v) Halle una fórmula para todas las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfacen $f(X^2 + X - 1) = (1, 2)$, $f(2X + 3) = (-1, 1)$ y $f(X^2 - X - 4) = (2, 1)$.

Ejercicio 5. Cuando sea posible, calcule bases del núcleo y de la imagen para cada transformación lineal de los Ejercicios 1 y 4 y decida, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. Si f es un isomorfismo, calcule f^{-1} .

Ejercicio 6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcule el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$. Decida si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 7. Sea \mathbb{k} un cuerpo y sean V, V' y V'' \mathbb{k} -espacios vectoriales. Dadas $g : V \rightarrow V'$ y $f : V' \rightarrow V''$ transformaciones lineales, pruebe que:

- (I) $\ker(g) \subseteq \ker(f \circ g)$;
- (II) si $\ker(f) \cap \text{im}(g) = \{0\}$, entonces $\ker(g) = \ker(f \circ g)$;
- (III) $\text{im}(f \circ g) \subseteq \text{im}(f)$;
- (IV) si $\text{im}(g) = V'$, entonces $\text{im}(f \circ g) = \text{im}(f)$.

Ejercicio 8.

- (I) Sean $S, T \subset \mathbb{R}^4$ los subespacios definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$. ¿Existe un isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?
- (II) ¿Existe un monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$?
- (III) ¿Existe un epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$?
- (IV) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \text{im}(f)$?

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos encuentre una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido:

- (I) $(1, 1, 0) \in \ker(f)$ y $\ker(f) \cap \text{im}(f) = \{0\}$;
- (II) $\ker(f) \cap \text{im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$;
- (III) $f \neq 0$ y $\ker(f) \subseteq \text{im}(f)$;
- (IV) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$;
- (V) $f \neq \text{id}$ y $f \circ f = \text{id}$;
- (VI) $\ker(f) \neq \{0\}$, $\text{im}(f) \neq \{0\}$; y $\ker(f) \cap \text{im}(f) = \{0\}$.

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes casos construya un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla:

- (I) $\text{im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
- (II) $\ker(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
- (III) $\ker(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$.

Ejercicio 11. Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que f es *nilpotente* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{m \text{ veces}} = 0.$$

- (I) Pruebe que si f es nilpotente, entonces f no es un monomorfismo ni un epimorfismo.
- (II) Si $\dim_{\mathbb{k}} V = n$, pruebe que f es nilpotente si y solo si $f^n = 0$.

Sugerencia: analice si las inclusiones $\ker(f^i) \subseteq \ker(f^{i+1})$ son estrictas o no.

- (III) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Se define una transformación lineal $f : V \rightarrow V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Pruebe que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

Ejercicio 12. Sea $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- (I) Halle una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\ker(f) = S$.
- (II) Usando el ítem anterior, halle ecuaciones para describir a S .
- (III) Halle un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + (0, 1, 1, 2)$.

Ejercicio 13. Sea \mathbb{k} un cuerpo.

- (I) Sea $S \subset \mathbb{k}^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encuentre una transformación lineal $f : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ tal que $\ker(f) = S$.
- (II) Sea $T \subset \mathbb{k}^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encuentre una transformación lineal $f : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ y un vector $y \in \mathbb{k}^n$ tales que $T = f^{-1}(y)$.

Ejercicio 14. Sean \mathbb{k} un cuerpo, V un \mathbb{k} -espacio vectorial, $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal y sean B, B' bases de V . Calcule $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

- (I) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$,
 $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 3, 1)\}$;
- (II) $\mathbb{k} = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$, $B = B'$ la base canónica de \mathbb{C}^2 ;
- (III) $\mathbb{k} = \mathbb{R}, V = \mathbb{C}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$, $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$;

(iv) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.

Ejercicio 15. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Halle $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B' ?

(ii) Halle una base de $\ker(f)$ y una base de $\text{im}(f)$.

(iii) Describa el conjunto $f^{-1}(\{w_1 - 3w_3 - w_4\})$.

Ejercicio 16. Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V . Sea $f: V \rightarrow V$ la transformación lineal tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Halle $|f^{-1}|_B$ y calcule $f^{-1}(v_1 - 2v_2 + v_4)$.

Ejercicio 17. Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión finita y sea B una base de V .

(i) Sea $\text{tr}: \text{hom}(V, V) \rightarrow \mathbb{k}$ la aplicación definida por $\text{tr}(f) = \text{tr}(|f|_B)$. Pruebe que $\text{tr}(f)$ no depende de la base B elegida. La aplicación $\text{tr}(f)$ se llama la *traza* del endomorfismo f .

(ii) Pruebe que $\text{tr}: \text{hom}(V, V) \rightarrow \mathbb{k}$ es una transformación lineal.

Ejercicio 18. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de \mathbb{R}^3 , y sea E la base canónica de \mathbb{R}^3 . Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |f|_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine U' .

Ejercicio 19.

(i) Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

y sea $v = (1, 0, 0, 0)$. Pruebe que $B = \{v, f(v), f^2(v), f^3(v)\}$ es una base de \mathbb{R}^4 . Calcule $|f|_B$.

(II) Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Pruebe que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Sugerencia: elija $v_1 \notin \ker(f^{n-1})$.

Ejercicio 20. Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Pruebe que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ e } i \leq \dim(\text{im}(f)), \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Ejercicio 21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

(i) Determine bases B y B' de \mathbb{R}^3 tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encuentre matrices inversibles $C, D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tales que

$$C \cdot A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 22. Sean $A \in \mathbb{k}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{k}^m$. Consideremos el sistema $A \cdot x = b$ y sea $(A \mid b)$ su matriz ampliada. Pruebe que $A \cdot x = b$ tiene solución si y solo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b)$.

Ejercicio 23. Sean $A \in \mathbb{k}^{m \times n}$. Calcule la dimensión de $T = \{x \in \mathbb{k}^{n \times r} / A \cdot x = 0\}$ en términos de $\text{rg}(A)$.

Ejercicio 24. Sean $A \in \mathbb{k}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{k}^{n \times r}$.

i) Pruebe que $\text{rg}(A \cdot B) \leq \text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A \cdot B) \leq \text{rg}(B)$.

ii) Supongamos que $n \neq m$. Decida si es posible que existan $C \in \mathbb{k}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{k}^{m \times n}$ tales que $AC = I_m$, $DA = I_n$, donde I_m, I_n son las identidades de $\mathbb{k}^{m \times m}$, $\mathbb{k}^{n \times n}$ respectivamente.

Ejercicio 25. Sean $A, D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determine C_1, C_2, C_3 y $C_4 \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que

$$C_1 \cdot A \cdot C_2 = C_3 \cdot D \cdot C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(II) Determine $f \in \text{hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B, B', B_1 y B'_1 de \mathbb{R}^3 tales que $|f|_{BB'} = A$ y $|f|_{B_1B'_1} = D$.

Ejercicio 26. Dadas $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, decida si existen matrices $P, Q \in GL(n, \mathbb{R})$ tales que $A = P \cdot B \cdot Q$ en los siguientes casos:

$$(a) \ n = 2, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b) \ n = 3, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 27. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Decimos que A es *semejante* a B si existe $C \in GL(n, \mathbb{K})$ tal que $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$. En tal caso, lo notamos $A \sim B$.

(I) Sean $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tales que $A \sim A'$. Pruebe que $\text{tr}(A) = \text{tr}(A')$.

(II) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

¿Existen $f \in \text{hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B y B' de \mathbb{R}^3 tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = A'$?