Álgebra Lineal

Segundo cuatrimestre - 2024

Práctica 1

Espacios vectoriales y coordenadas

Espacios vectoriales

Ejercicio 1. Pruebe en cada caso que el conjunto V con la suma y el producto por escalares definidos es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{k}$.

i) $V = \mathbb{k}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_i \in \mathbb{k}\,\forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de un cuerpo arbitrario $\mathbb{k}$, con las operaciones

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}},$$
$$\lambda \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} := (\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

ii) Dado un conjunto X, $V = \mathcal{P}(X)$ su conjunto de partes, $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, con las operaciones

$$B + C := B \triangle C,$$
$$0 \cdot B := \emptyset, \quad 1 \cdot B := B.$$

iii) $V = \mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, con las operaciones

$$a \oplus b := ab,$$
$$\tfrac{m}{n} \otimes a := \sqrt[n]{a^m}.$$

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial, $\lambda \in \mathbb{k}$ y $v \in V$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

i) $0 \cdot v = 0_V$;

ii) $-(-v) = v$;

iii) si $\lambda \cdot v = 0_V$, entonces $\lambda = 0$ o $v = 0_V$;

iv) $-0_V = 0_V$.

Ejercicio 3 (Traslaciones)**.** Dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$, la *traslación en v* es la función

$$f_v \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x, y) + v.$$

i) Interprete geométricamente el efecto de f_v sobre el plano.

II) Pruebe que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma $+_{(2,1)}$ y el producto por escalares $\cdot_{(2,1)}$ definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(x,y) +_{(2,1)} (x',y') &:= (x+x'-2, y+y'-1)\\ r \cdot_{(2,1)} (x,y) &:= r(x-2,y-1)+(2,1)\end{aligned}$$

Denotaremos $\mathbb{R}^2_{(2,1)}$ a este espacio vectorial, para distinguirlo de $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual. La elección de notación se basa en que $(2,1)$ resulta el neutro de la suma $+_{(2,1)}$.

III) Interprete geométricamente $+_{(2,1)}$ y $\cdot_{(2,1)}$, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}(x,y) +_{(2,1)} (x',y') &= f_{(2,1)}\big(f_{(-2,-1)}(x,y) + f_{(-2,-1)}(x',y')\big),\\ r \cdot_{(2,1)} (x,y) &= f_{(2,1)}\big(r \cdot f_{(-2,-1)}(x,y)\big).\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Encuentre un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares, y otro subconjunto que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

Ejercicio 5. Para cada $\Bbbk$-espacio vectorial V, decida cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios.

I) $\Bbbk = \mathbb{R}$ y $\Bbbk = \mathbb{C}$; $V = \mathbb{C}$, $S_1 = \{a \cdot i : a \in \mathbb{R}\}$.

II) $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario, $V = \Bbbk[X]$, $S_2 = \{f \in \Bbbk[X] : f'(1) = 0\}$.

III) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S_3 = \{f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$.

IV) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = C^\infty(\mathbb{R})$, $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' + 3f' = 0\}$.

V) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2_{(2,1)}$, $S_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{(2,1)} : x+y = 3\}$.

VI) $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario, $V = \Bbbk^{\mathbb{N}}$, $S_6 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Bbbk^{\mathbb{N}} :$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0$ para todo $r \geq k\}$.

VII) $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario, $V = \Bbbk^{\mathbb{N}}$, $S_7 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Bbbk^{\mathbb{N}} : a_1 \cdot a_2 = 0\}$.

Ejercicio 6. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, V un espacio vectorial y S y T dos subespacios de V. Pruebe que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Ejercicio 7. Encuentre un sistema de generadores para los siguientes $\Bbbk$-espacios vectoriales:

I) $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario, $n \in \mathbb{N}$ y $V = \Bbbk_n[X] := \{f \in \Bbbk[X] : f = 0$ ó $\operatorname{gr}(f) \leq n\}$.

II) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^n$.

III) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0,\ x-y = 0\}$.

IV) $\Bbbk = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $V = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3 : x+2y+z = 0\}$.

V) $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $V = \{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} : A = -A^t\}$.

VI) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}_4[X] : f(1) = 0, f(2) = f(3)\}$.

vii) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = 0\ \forall i \geq 5,\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0,\ a_2 + a_4 = 0\}$.

viii) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$.

Ejercicio 8. Decida cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

i) Sea $\Bbbk$ un cuerpo y V un $\Bbbk$-espacio vectorial. Dados $v, w \in V$ y $\lambda \in \Bbbk$, $\langle v, w\rangle = \langle v, w + \lambda \cdot v\rangle$.

ii) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$. Si $\langle v_1,\ v_2,\ w\rangle = \langle v_3,\ v_4,\ w\rangle$, entonces $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_3, v_4\rangle$.

Ejercicio 9. Sea $S = \langle(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Determine si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

ii) Determine si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

iii) Determine si $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

Ejercicio 10. En cada caso, dados V un $\Bbbk$-espacio vectorial y S, T subespacios de V, halle un sistema de generadores para $S \cap T$.

i) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle(1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24)\rangle$ $T = \langle(1, 1, 0), (3, 2, 1)\rangle$.

ii) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A = A^t\}$, $T = \{(x_{ij})_{1\leq, i,j\leq 3} : x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

iii) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$, $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5\rangle$.

Ejercicio 11. Para cada uno de los siguientes $\Bbbk$-espacios vectoriales V, decida si el conjunto de vectores $X \subset V$ es linealmente independiente sobre $\Bbbk$.

i) $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario, $V = \Bbbk[X]$, $X = \{(1 - X)^3,\ (1 - X)^2,\ 1 - X,\ 1\}$.

ii) $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^4$, $X = \{(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, -1), (0, 2, 1, -5)\}$.

iii) $\Bbbk = \mathbb{R}$ y $\Bbbk = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $X = \{(1 - i, i),\ (2, -1 + i)\}$.

iv) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $X = \{e^x, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$.

v) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $X = \{\operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$.

vi) $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario, $n \geq 2$, $V = \Bbbk^{n\times n}$, y, dada $A \in V$, $X = \{I_n, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2-1}\}$.

Ejercicio 12. En cada uno de los siguientes casos, halle todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto X resulte $\mathbb{R}$-linealmente independiente.

i) $\{(k, 1, 0),\ (3, -1, 2),\ (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

ii) $\{kX^2 + X,\ X^2 - k,\ k^2X\} \subset \mathbb{R}[X]$.

iii) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejercicio 13. Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ si y solo si visto como subconjunto de $\mathbb{C}^n$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 14. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

Ejercicio 15. Complete los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del $\Bbbk$-espacio vectorial V indicado:

I) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1, 1, 1, 1)\,,\ (0, 2, 1, 1)\}$;

II) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}_3[X]$, $\{X^3 - 2X + 1\,,\ X^3 + 3X\}$;

III) $\Bbbk = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^{2\times 2}$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

IV) $\Bbbk = \mathbb{R}$, V y S como en el ítem anterior.

Ejercicio 16. Para cada uno de los siguientes $\Bbbk$-espacios vectoriales V, extraiga una base del subespacio S a partir del sistema de generadores dado.

I) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 2)\,,\ (1, 3, 5)\,,\ (1, 1, 4)\,,\ (5, 1, 1) \rangle$.

II) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \langle X^2 + 2X + 1\,,\ X^2 + 3X + 1\,,\ X + 2 \rangle$.

III) $\Bbbk = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^{2\times 2}$, $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

IV) $\Bbbk = \mathbb{R}$, V y S como en el ítem anterior.

Ejercicio 17. Halle una base y la dimensión de los siguientes $\Bbbk$-espacios vectoriales:

I) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}[X]\ :\ f = 0\ \text{ó}\ \mathrm{gr}(f) \leq 3, f(2) = f(-1)\}$.

II) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}[X]\ :\ f = 0\ \text{ó}\ \mathrm{gr}(f) \leq 3, f$ es un múltiplo de $(x^2 - 2)\}$.

III) $\Bbbk$ un cuerpo arbitario, $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Bbbk^{\mathbb{N}} : a_i = a_j\ \forall i, j \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 18. Halle la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

I) $S = \langle (1, k, 1)\,,\ (-1, k, 1)\,,\ (0, 1, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3$.

II) $S = \{x \in \mathbb{R}^3\ :\ Ax = 0\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Ejercicio 19. Consideremos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \rangle, \qquad T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Halle un subespacio $U \subset \mathbb{R}^4$ tal que $\dim U = 2$ y $S \cap T \subset U \subset T$.

Ejercicio 20. Determine todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales se tienen las siguientes igualdades de subespacios en $\mathbb{R}^3$:

I) $\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$.

II) $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$, siendo $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle$.

Ejercicio 21. Para cada uno de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V y subespacios S y T, caracterice $S + T \subseteq V$ y determine si la suma es directa.

I) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 1) \rangle$, $T = \langle (2, -1, 1), (3, 0, 2) \rangle$.

II) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f = 0 \text{ ó } \operatorname{gr}(f) \leq 3\}$, $T = \{f \in \mathbb{R}[X] : \operatorname{mult}(4, f) \geq 4\}$.

III) $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$, $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3} : A_{11} + A_{21} = 0,\ 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\}$,
$T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Ejercicio 22. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$.

I) Pruebe que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{k}^{n\times n}$ y calcule su dimensión.

a) $S_1 = \{A \in \mathbb{k}^{n\times n} : A = A^t\}$, las matrices *simétricas*;
b) $S_2 = \{A \in \mathbb{k}^{n\times n} : A = -A^t\}$, las matrices *antisimétricas*;
c) $S_3 = \{A \in \mathbb{k}^{n\times n} : A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$, las matrices *diagonales*;
d) $S_4 = \{A \in \mathbb{k}^{n\times n} : A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = \cdots = A_{nn}\}$, las matrices *escalares*;
e) $S_5 = \{A \in \mathbb{k}^{n\times n} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

II) Pruebe que:

a) $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{k}^{n\times n}$ si $2 \neq 0$ en $\mathbb{k}$.
b) $S_4 \oplus S_5 = \mathbb{k}^{n\times n}$ si $\mathbb{k}$ es $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ejercicio 23. Para cada uno de los siguientes $\mathbb{k}$-espacios vectoriales V junto con subespacios S, halle un subespacio T de V tal que $S \oplus T = V$. El subespacio T se dice un *complemento* de S.

I) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1, 2, -1, 3),\ (2, 3, -2, 1),\ (0, 1, 0, 7) \rangle$.

II) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}_4[X]$, $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$.

III) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, $S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

Ejercicio 24. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

I) si S y T son dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$;

II) si S, T y W son subespacios de $\mathbb{R}^{11}$ tales que $\dim S = \dim T = \dim W = 4$, entonces $\dim(S \cap T \cap W) \geq 1$.

Ejercicio 25. Sean S, T y U subespacios de un $\mathbb{k}$-espacio vectorial V tales que $S\cap T = S\cap U$, $S+T = S+U$ y $T \subseteq U$. Pruebe que $T = U$.

Ejercicio 26 (Hiperplanos)**.** Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión n y sea T un *hiperplano* de V, es decir, un subespacio de dimensión $n - 1$.

I) Pruebe que para todo $v \notin T$ se tiene que $T \oplus \langle v \rangle = V$.

II) Dado un subespacio S de V tal que $S \nsubseteq T$, pruebe que $S + T = V$. Calcule $\dim(S \cap T)$.

III) Dados S y T dos hiperplanos distintos, calcule $\dim(S \cap T)$.

Ejercicio 27. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

I) Consideremos $S = \{f \in V : f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in V : f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ los conjuntos de funciones *pares* e *impares* respectivamente. Pruebe que S y T son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.

II) Pruebe que los conjuntos $U = \{f \in V : f(0) = 0\}$ y $W = \{f \in V : f \text{ es constante}\}$ son subespacios de V tales que $U \oplus W = V$.

Coordenadas

Ejercicio 28. Para cada uno de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V, halle las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B.

I) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 2, -1)$ y $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$.

II) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3,\ 1 + X,\ X^2 + 5,\ X^3 + X^2\}$.

III) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 29. Para cada uno de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V y bases B, B', calcule la matriz de cambio de base $C(B, B')$.

I) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$.

II) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3,\ 1 + X,\ X^2\}$, $B' = \{1,\ X + 3,\ X^2 + X\}$.

III) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$.

Ejercicio 30. Para cada respectivo ítem del Ejercicio 29 y $v \in V$ dado, halle las coordenadas de v respecto de B y –utilizando la matriz de cambio de base– las coordenadas de v respecto de B'.

I) $v = (-1, 5, 6)$.

II) $v = X$.

III) $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$.

Ejercicio 31. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Dadas bases B, B' y B'' de V, pruebe que $C(B, B'') = C(B', B'')C(B, B')$. Deduzca que $C(B, B')$ es una matriz inversible con $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$.

Ejercicio 32. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo. Dada $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{3\times 3}$ y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de de $\mathbb{k}^3$, halle:

I) una base B_1 de $\mathbb{k}^3$ tal que $M = C(B_1, B)$;

II) una base B_2 de $\mathbb{k}^3$ tal que $M = C(B, B_2)$.