ESPACIO DUAL: ANULADORES Y TRANSPUESTA
CLASE ÁLGEBRA LINEAL 18/10/2024

VALENTÍN NICO

En esta clase vamos a trabajar con el ejercicio 5 (en una versión un poquito modificada) de la práctica de Espacio Dual, recordar un poco de anuladores e introducir la definición de la transformación lineal transpuesta.

Ejercicio 1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n.*

(1) Dados $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_r \in V^*$, demostrar que

$$\bigcap_{i=1}^{r} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi) \iff \varphi \in \langle \varphi_1, ..., \varphi_r \rangle.$$

(2) Dados $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n \in V^*$, demostrar que

$$\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \text{ es una base de } \mathbb{V}^* \iff \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) = 0.$$

Proof. Para el primer ítem, comencemos por la dirección ($\Leftarrow$). Si $\varphi \in \langle \varphi_1, ..., \varphi_r \rangle$, entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ tales que $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + ... + \lambda_r\varphi_r$. Luego, si $v \in \bigcap_{i=1}^{r} \ker(\varphi_i)$, debe ser que

$$\varphi(v) = \lambda_1\varphi_1(v) + ... + \lambda_r\varphi_r(v) = 0 + ... + 0 = 0.$$

Luego, $v \in \ker(\varphi)$ y como v era arbitrario se concluye que

$$\bigcap_{i=1}^{r} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi).$$

Para la implicación ($\Rightarrow$), procedemos por la contrarecíproca. Supongamos que $\varphi \notin \langle \varphi_1, ..., \varphi_r \rangle$. Podemos extraer una base del sistema de generadores dada por $\{\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_s}\} \subseteq \{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$. Por la suposición, se tiene que $\{\varphi_{i_1}, ..., \varphi_{i_s}, \varphi\}$ es un subconjunto linealmente independiente que se puede extender a una base B^* de todo $\mathbb{V}^*$, que además corresponde a la base dual de alguna base $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de $\mathbb{V}$. En particular, obtenemos que v_{s+1} anula a todos los φ_i pues anula a todos los elementos de la forma φ_{i_k}, con $k = 1, 2, ..., s$; que generan a todos los φ_i, con $i = 1, ..., r$. Por otra parte, $\varphi(v_{s+1}) = 1$, probando que $v_{s+1} \notin \ker(\varphi)$ y por lo tanto que

$$\bigcap_{i=1}^{r} \ker(\varphi_i) \nsubseteq \ker(\varphi).$$

Para el segundo item, comencemos por la dirección ($\Rightarrow$). Si $B^* = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ es una base de $\mathbb{V}^*$, sabemos que admite una base predual $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de $\mathbb{V}$. Luego, si

$v \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)$, existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ y por lo tanto

$$0 = \varphi_i(v) = \varphi_i(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_i, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Para la dirección $(\Leftarrow)$, para cualquier $\varphi \in \mathbb{V}^*$ se tiene que $0 \subseteq \ker(\varphi)$ y por el primer ítem $\varphi \in \langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$. De esta forma, vimos que estamos en presencia de un conjunto de generadores de n elementos, y como la dimensión de V^* es exactamente n, concluimos que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ es una base. $\square$

Para incorporar el lenguaje de espacio Dual y obtener un *insight* de lo que el ejercicio nos está diciendo, recordemos la siguiente definición:

Definición 1. *Dado* $S \subseteq \mathbb{V}^*$ *un subconjunto de un* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial, se define* ${}^\circ S$ *el anulador a izquierda como:*

$${}^\circ S = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0 \ \forall \varphi \in S\} = \bigcap_{\varphi \in S} \ker(\varphi).$$

De la definición se siguen algunas propiedades:

Proposición 2. *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}-$*espacio vectorial. Entonces vale que:*

- ${}^\circ 0 = \mathbb{V}$ *y* ${}^\circ(\mathbb{V}^*) = 0$.
- *Para cualquier subconjunto* $S \subseteq \mathbb{V}$, ${}^\circ S = {}^\circ\langle S \rangle$.
- *Para cualesquieras subconjuntos* $S, T \subseteq \mathbb{V}$, *vale que:*

$$S \subseteq T \implies {}^\circ T \subseteq {}^\circ S.$$

Más aún, si $\mathbb{V}$ *es de dimensión finita y* $S, T \subseteq$ *son subespacios vale que:*

$$S \subseteq T \iff {}^\circ T \subseteq {}^\circ S.$$

Reescribiendo el ejercicio 1 con esta nueva tecnología resulta en un enunciado inmediato de las propiedades anteriores:

Ejercicio 1*. *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimensión n.*

(1) Dado $S \subseteq V^*$ *un subconjunto y* $\varphi \in \mathbb{V}^*$, *demostrar que*

$${}^\circ S \subseteq {}^\circ\{\varphi\} \iff \langle \varphi \rangle \subseteq \langle S \rangle.$$

(2) Dados $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n \in V^*$, *demostrar que*

$$\langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle = \mathbb{V}^* \iff {}^\circ\{\varphi_1, ..., \varphi\} = 0 = {}^\circ(\mathbb{V}^*).$$

Para seguir, vamos a introducir el concepto de transformación lineal transpuesta.

Definición 3. *Dada* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal, se define* $f^t : \mathbb{W}^* \to \mathbb{V}^*$ *la transformación lineal dada por:*

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f.$$

La transpuesta verifica propiedades fundamentales:

Proposición 4. ***(funtorialidad y linealidad)*** *Dadas* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *y* $g : \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ *transformaciones lineales, se verifica que:*

$$(g \circ f)^t = f^t \circ g^t,$$

y además que:

$$(\mathrm{Id}_{\mathbb{V}})^t = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}.$$

Más aún, si $g : V \to \mathbb{W}$ *es otra transformación lineal y* $\lambda \in \mathbb{K}$*, entonces tenemos que:*

$$(f + \lambda g)^t = f^t + \lambda g^t.$$

Por otra parte, en el Ejercicio 18 de la práctica tenemos para probar la siguiente propiedad de dualidad de la transpuesta:

Proposición 5. *Dada* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal, se tiene que:*

$$\ker(f)^\circ = \mathrm{im}(f^t) \ \text{ y además } \ \ker(f^t) = \mathrm{im}(f)^\circ.$$

Exploremos alguna propiedad interesante de la transpuesta:

Ejercicio 2. *Sea* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *una transformación lineal y* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial de dimensión finita y* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Demostrar que:*

$$\exists\, v \neq 0,\ f(v) = \lambda v \iff \exists\, \varphi \neq 0,\ f^t(\varphi) = \lambda \varphi.$$

Proof. Primero observemos que el enunciado es equivalente a afirmar que

$$\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) \neq 0 \iff \ker(f^t - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}) \neq 0.$$

Sin embargo, por las propieades mencionadas anteriormente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) \neq 0 &\iff \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{V}})^\circ \neq \mathbb{V}^* \\
&\iff \mathrm{im}((f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{V}})^t) \neq \mathbb{V}^* \\
&\iff \mathrm{im}(f^t - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}) \neq \mathbb{V}^* \\
&\iff (f^t - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}) \text{ no es un epimorfismo} \\
&\iff (f^t - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}) \text{ no es un monomorfismo} \\
&\iff \ker(f^t - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{V}^*}) \neq 0.
\end{aligned}$$

□