TRANSFORMACIONES LINEALES Y BASES
CLASE ÁLGEBRA LINEAL 10/09/2024

VALENTÍN NICO

La idea de la clase es ver cómo se complementan los lenguajes de transformaciones lineales y bases en espacios vectoriales. Primero, veremos como el uso de bases ayuda en la descripción de las transformaciones lineales y luego, recíprocamente, veremos cómo el lenguaje de transformaciones lineales esclarece propiedades esenciales de los espacios vectoriales. En primer lugar, comencemos por observar cómo una matriz induce una transformación lineal:

Observación. *Dados n, m números naturales y $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, se tiene la siguiente transformación lineal $f_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$:*

$$f_A(v) := A \cdot v$$

Esta matriz cumple algunas propiedades deseables:

Ejercicio 1. *La transformación lineal f_A verifica que $\ker(f)$ es el subespacio de soluciones al sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado a A, e $\mathrm{im}(f)$ verifica que es el subespacio formado por los vectores columnas de A.*

Para esta transformación lineal, evaluar un vector corresponde con multiplicar a derecha por un vector. Buscamos ahora la recíproca: dada una transformación lineal, una matriz para la cual multiplicar a derecha por un vector corresponda a evaluar:

Observación. *Si $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^m$, $(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{K}^m$ y $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, entonces resulta que:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i f(e_i) = \begin{pmatrix} | & | & ... & | \\ f(e_1) & f(e_2) & ... & f(e_m) \\ | & | & ... & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Esto, sin embargo, solo funciona para transformaciones lineales entre $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$. En busca de lograr una generalización, obtenemos el siguiente resultado:

Definición 1. *Dados dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales V, W con bases $B_1 = \{v_1, v_2, ...v_m\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ y $f : V \to W$ una transformación lineal, se define la matriz de f en las bases B_1, B_2 como:*

$$|f|_{B1,B2} = \begin{pmatrix} | & | & ... & | \\ [f(v_1)]_{B_2} & [f(v_2)]_{B_2} & ... & [f(v_m)]_{B_2} \\ | & | & ... & | \end{pmatrix}$$

Además, esta matriz verifica un análogo a la propiedad anterior:

Proposición 2. *Dado un vector $v \in V$, se tiene que:*

$$[f(v)]_{B_2} = |f|_{B_1,B_2}[v]_{B_1}.$$

Esta última propiedad no está diciendo que para conocer los valores de una transformación lineal en un vector solo hace falta ver sus valores en la base y las coordenadas en esas bases de los vectores que querés conocer. Vamos con un ejemplo práctico:

Ejercicio 2. *Sea $f = \{p \in \mathbb{R}_3[X] \mid p(0) = 0\} \to \mathbb{R}_2[X]$ la transformación lineal que en las bases $B_1 = \{X^3 + X^2 + X, X^2 + X, X\}$ y $B_2 = \{X^2, X, 1\}$ viene dada por la matriz asociada:*

$$|f|_{B_1,B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $f(X^3)$, $f(X^2)$ y $f(X)$ y luego hallar f.

Proof. Primero notemos que $[X^3]_{B_1} = (1, -1, 0)$. Luego, por la propiedad anterior, se sigue que:

$$[f(X^3)]_{B_2} = (3, 0, 0)$$

Y por lo tanto que $f(X^3) = 3X^2$. Análogamente, obtenemos que:

$$[f(X^2)]_{B_2} = (0, 2, 0),$$

y por lo tanto que $f(X^2) = 2X$. Y por último:

$$[f(X)]_{B_2} = (0, 0, 1),$$

y por lo tanto que $f(X) = 1$. En un polinomio arbitrario, resulta que:

$$f(aX^3 + bX^2 + cX) = 3aX^2 + 2bX + c,$$

la transformación lineal derivación. □

Como vimos del ejemplo, a priori podría ser muy poco evidente la transformación resultante únicamente de observar la matriz, y depende fuertemente de las bases elegidas. De esta manera, y al igual que ocurría al cambiar coordenadas, hay una relación entre las bases elegidas y la matriz de una transformación lineal en una base:

Proposición 3. *Si $f : V \to W$ es una transformación lineal y B_1, B_1' son bases de V y B_2, B_2' bases de W, entonces vale que:*

$$|f|_{B_1',B_2'} = C(B_2, B_2')|f|_{B_1,B_2}C(B_1', B_1).$$

Hasta ahora sencillamente notamos cómo podemos inducir una matriz a partir de la transformación lineal. Sin embargo, esa identificación establece una correspondencia entre *espacios de funciones* y espacios de matrices:

Definición 4. *Llamamos $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ al espacio vectorial de transformaciones lineales entre V y W con la suma y multiplicación por escalares punto a punto.*

Dados dos espacios vectoriales V y W con bases B_1 y B_2 de dimensión m y n, respectivamente obtenemos la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) &\xrightarrow{[.]_{B_1,B_2}} \mathbb{K}^{n\times m} \\ f &\longmapsto [f]_{B_1,B_2} \end{aligned}$$

Ejercicio 3. $[.]_{B_1,B_2}$ *es una transformación lineal y biyectiva.*

En ese sentido, esos dos espacios son muy similares: existe una asignación que es uno a uno y *respeta* la estructura del espacio. Eso motiva la siguiente definición:

Definición 5. *Una transformación lineal* $f : V \to W$ *es un* ***isomorfismo*** *si es lineal y biyectiva.*

Más aún, esta correspondencia respeta algo extra además de la estructura vectorial de esos espacios. Resulta que como multiplicar a derecha por un vector es evaluar, componer dos transformaciones lineales equivale a multiplicar las dos matrices en sus respectivas bases:

Proposición 6. *Sean* $f : V \to W$ *y* $g : W \to U$ *transformaciones lineales tales que* B_1, B_2, B_3 *son bases de* V, W *y* U*, respectivamente, entonces se tiene que:*

$$[g \circ f]_{B_1,B_3} = [g]_{B_2,B_3}[f]_{B_1,B_2}.$$

Corolario 7. f *es un isomorfismo si y solo si la matriz* $[f]_{B_1,B_2}$ *es inversible. En este caso, se tiene que:*

$$[f^{-1}]_{B_2,B_1} = [f]^{-1}_{B_1,B_2}.$$

Ejercicio 4. *La transformación lineal derivación definida según el Ejercicio 2 es un isomorfismo.*

Proof. Dos demostraciones alternativas: la primera opción es observar que la primitiva de la función es única con la condición de que $p(0) = 0$. La segunda opción resulta notar que la matriz en las bases B_1, B_2 que le corresponden es un isomorfismo pues sus columnas son linealmente independientes y por el Corolario 7 f es un isomorfismo. Queda como verificación que calcular la inversa de esa matriz da lugar a tomar primitiva como inversa lineal. □

Hasta ahora vimos cómo el lenguaje de las bases permite conocer información respecto las transformaciones lineales. Ahora bien, lo que sigue es comprender cómo las transformaciones lineales son en realidad pilares de la estructura vectorial y, en particular, le dan un sentido a la definición de base. Para eso, comencemos formalizando algo que en la clase anterior anduvieron viendo:

Ejercicio 5. *Dado* V *un espacio vectorial con base* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *y un espacio vectorial* W*. Sean* $w_1, w_2, ..., w_n$ *vectores de* W*, entonces existe una única transformación lineal* $f : V \to W$ *tal que:*

$$f(v_i) = w_i.$$

Proof. Dado un v en V, existe una única combinación lineal tal que:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$$

Definimos la transformación lineal f como:

$$f(v) := \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_n w_n.$$

Esta función es de hecho una transformación lineal porque escribir en coordenadas es una transformación lineal. Es decir, si:

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n v_n,$$

entonces

$$[v + w]_B = (\lambda_1 + \gamma_1, \lambda_2 + \gamma_2, ..., \lambda_n + \gamma_n),$$

y por lo tanto:

$$f(v + w) = (\lambda_1 + \gamma_1)v_1 + (\lambda_2 + \gamma_2)v_2 + ... + (\lambda_n + \gamma_n)v_n = f(v) + f(w).$$

Con la multiplicación por escalares resulta análogo. Por último, es la única que podríamos haber definido pues si otra transformación lineal $g : V \to W$ verifica la condición del enunciado, entonces debe ser que:

$$g(v) = \lambda_1 g(v_1) + \lambda_2 g(v_2) + ... + \lambda_n g(v_n) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_n w_n = f(v).$$

□

Esta propiedad fundamental de las transformaciones lineales permite generalizar problemas complicados del pasado:

Ejercicio 6. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Caracterizar las transformaciones lineales $f : V \to V$ que conmutan con todas las transformaciones lineales $g : V \to V$.*

Proof. En busca de extender el resultado que probamos anteriormente para matrices, probemos que las múltiplo de la identidad son exactamente las que conmutan con todos los *endomorfismos*[1]. Una dirección es clara. Veamos que si f conmuta con todos los endomorfismos entonces es un múltiplo de la identidad. Supongamos que existe v tal que $f(v)$ no es múltiplo de v, y busquemos una contradicción. En este caso, debe ser que son linealmente independientes y por lo tanto los podemos extender a una base del espacio vectorial V, dada por $B = \{v, f(v), v_3, v_4, ...v_n\}$. Como puedo definir una transformación lineal en la base de manera arbitraria, defino $g : V \to V$ la (única) transformación lineal que verifica que:

[1]Transformación lineal con igual dominio y codominio V

$$v \xrightarrow{g} v$$
$$f(v) \xrightarrow{g} v$$
$$v_3 \xrightarrow{g} 0$$
$$...$$
$$v_n \xrightarrow{g} 0$$

Por hipótesis, f conmuta con cualquier endomorfismo y por ende en particular con g. Es decir, $f \circ g = g \circ f$. Evaluando obtenemos:

$$f(v_1) = f(g(v_1)) = g(f(v_1)) = v_1,$$

lo cual contradice la independencia lineal de v_1 y $f(v_1)$, probando que necesariamente existe c_v tal que $f(v) = c_v \cdot v$ para cada v en V. Veamos que ese c_v es el mismo para todo vector. Fijemos una base $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ tal que $f(v_i) = c_i v_i$ para $i = 1, 2, ..., n$ y consideremos la transformación lineal $g_{ij} : V \to V$ dada por:

$$v_i \xrightarrow{g_{ij}} v_j$$
$$v_j \xrightarrow{g_{ij}} v_i$$
$$v_3 \xrightarrow{g_{ij}} 0$$
$$...$$
$$v_n \xrightarrow{g_{ij}} 0$$

Debe ser necesariamente que:

$$c_j v_i = c_j g_{ij}(v_j) = g_{ij}(c_j v_j) = f(g_{ij}(v_j)) = f(v_i) = c_i v_i.$$

Esto concluye que necesariamente $c_i = c_j = \lambda$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$; y por lo tanto que $f(v) = \lambda v$ para todo v en V. □

Finalmente, veamos cómo la propiedad fundamental mencionada de hecho caracteriza a las bases:

Teorema 8. *(**Propiedad Universal de la Base**) Dado un espacio vectorial V de dimensión finita, un subconjunto $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V si y solo si para cualquier espacio vectorial W y vectores $w_1, w_2, ..., w_n$ en W existe una única transformación lineal $f : V \to W$ tal que:*

$$v_1 \xrightarrow{g} v_1$$
$$f(v_1) \xrightarrow{g} v_1$$
$$v_3 \xrightarrow{g} 0$$
$$...$$
$$v_n \xrightarrow{g} 0$$

Proof. Resta probar la implicación recíproca. Sea B un subconjunto con esa propiedad. Probemos primero que es linealmente independiente. Para eso, elijo el espacio vectorial $\mathbb{K}$ y para cada $i = 1, 2, ..., n$ la única transformación lineal $f_i : V \to \mathbb{K}$ que verifica que $f(v_i) = 1$ y $f(v_j) = 0$ para todo $j \neq i$. En particular, dada una combinación lineal nula:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0,$$

debe necesariamente ser que:

$$0 = f_i(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_i.$$

Luego, supongamos que B no genera. Como es linealmente independiente, se puede extender a una base $\tilde{B} = \{v_1, v_2, ...v_n, w_1, w_2, ...w_k\}$ de todo el espacio vectorial V. Esa base verifica la ida de la propiedad universal, de modo que existen transformaciones lineales $f_1, f_2 : V \to V$ que verifican que $f_1(v_i) = f_2(v_i)$, para $i = 1, 2, ..., n$ pero que $f_1(w_i) \neq f_2(w_i)$ para $i = 1, 2, ..., k$, por lo que $f_1 \neq f_2$, pero ambas coinciden en los elementos de B, contradiciendo la unicidad del teorema. La contradicción provino de suponer que B no genera el espacio vectorial, de modo que B resulta una base. $\square$

El resultado del teorema puede enmarcarse en el siguiente diagrama (conmutativo) ilustrativo:

$$\begin{tikzcd}
v_i \arrow[r, mapsto] & w_i \\
B = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \arrow[r] \arrow[d, hook, "inc"'] & W \\
V \arrow[ur, dashed, "\exists!\, f"'] &
\end{tikzcd}$$