Práctica 7: Módulos

1 En cada uno de los siguientes casos, verificar que la acción del anillo A sobre el grupo abeliano M define en M una estructura de A-módulo a izquierda.

(a) $A = M_n(\mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^n$, $a \cdot m := a \cdot m^t$ (producto usual de matrices).

(b) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, $p \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (p(1)x_1, p(2)x_2, \ldots, p(n)x_n)$.

2 Sean A un anillo y M un A-módulo a izquierda.

(a) Probar que el conjunto $\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A : am = 0\ (\forall m \in M)\}$ es un ideal a izquierda de A. Si $\mathrm{Ann}(M) = 0$, decimos que M es un A-módulo *fiel*.

(b) Determinar cuáles de los A-módulos del ejercicio anterior son fieles.

3 Sean A y B dos anillos, M un B-módulo y $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot m := \varphi(a) \cdot m$ define sobre M una estructura de A-módulo.

4 Sean V y W dos $\mathbb{Q}$-módulos y $f : V \to W$ una función. Probar que f es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos si y sólo si es un morfismo de grupos.

5 Sean A un anillo y N, M dos A-módulos.

(a) Mostrar que $Hom_A(M,N)$ es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m), \qquad (\forall f,\, g \in Hom_A(M,N), m \in M).$$

(b) Sea $Z(A)$ el centro de A. Definimos una operación

$$Z(A) \times Hom_A(M,N) \to Hom_A(M,N)$$

poniendo

$$(a \cdot f)(m) = f(am), \qquad (\forall f \in Hom_A(M,N),\ a \in Z(A),\ m \in M).$$

Mostrar que esto hace de $Hom_A(M,N)$ un $Z(A)$-módulo.

6 En cada uno de los siguientes casos, determinar si S es un submódulo del A-módulo M.

(a) $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C}$, $S = \mathbb{R}i$.

(b) A un anillo cualquiera, $M = A^n$, $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M : a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0\}$.

(c) $A = k$, $M = k[X]$, $S = \{f \in k[X] : f = 0 \text{ o } \mathrm{gr}(f) \leq n\}$.

(d) $A = k[X]$, $M = k[X]$, $S = \{f \in k[X] : f = 0 \text{ o } \mathrm{gr}(f) \leq n\}$.

(e) $A = k[X]$, $M = k[X]$, $S = \{f \in k[X] : f = 0 \text{ o } \mathrm{gr}(f) \geq n\}$.

7 Caracterizar, en cada uno de los siguientes casos, el A-módulo cociente M/S.

(a) $M = A^n$, $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M : a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0\}$.

(b) $M = A[X]$, $S = \{f \in M : f(1) = 0\}$.

8 Probar que un A-módulo es finitamente generado si y sólo si es isomorfo a un cociente de A^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

9 Probar que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

10 Sean A un anillo conmutativo y $S \subset A$ multiplicativamente cerrado. Dado un grupo abeliano M, probar que M admite una estructura de A_S-módulo si y sólo si admite una estructura de A-módulo tal que para todo $s \in S$, la función $\mu_s : m \mapsto s \cdot m$ es un isomorfismo.