Práctica 6: Anillos - Segunda parte

1 Sean A, B anillos conmutativos.

(a) Probar que si $f : A \to B$ es un morfismo de anillos, entonces para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de B se tiene que $f^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A.

(b) ¿Es cierto el enunciado anterior si reemplazamos la palabra "primo" por "maximal"?

2 Sea A un anillo conmutativo. El *radical de Jacobson* de A es la intersección $J(A)$ de todos los ideales maximales de A. Probar que $x \in J(A)$ si y sólo si para cada $y \in A$ se tiene que $1 - xy$ es una unidad.

3 Probar que todo dominio euclídeo es un DIP.

4 Sea A un anillo. Probar que:

(a) $A[X]$ es un dominio íntegro si y sólo si A es dominio íntegro.

(b) $A[X]$ es un DIP si y sólo si A es un cuerpo.

5 Sea k un cuerpo. Probar que el anillo de series formales $k[\![X]\!]$ es un dominio euclídeo.

6 Sean A un dominio íntegro y $a \in A$.

(a) Probar que si a es primo entonces es irreducible.

(b) Probar que si A es DFU y a es irreducible, entonces es primo.

7 Probar que si A es un DIP, entonces todo ideal primo no nulo de A es maximal.

8 Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados y sea $\sqrt{d}$ una raíz cuadrada de d en $\mathbb{C}$. Consideramos el subanillo de $\mathbb{C}$

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \left\{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

y definimos la *norma* de un elemento de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ como $N\left(a + b\sqrt{d}\right) = a^2 - db^2$.

(a) Probar que $N(zw) = N(z)N(w)$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$.

(b) Probar que $z \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ es una unidad si y sólo si $N(z) = \pm 1$.

(c) Probar que si $z \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ es tal que $N(z)$ es un número primo, entonces z es irreducible.

(d) Probar que todo elemento no nulo ni unidad de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ se puede escribir como producto de irreducibles (posiblemente de más de una manera).

9 Probar que, en el anillo $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$:

(a) los elementos 2 y 3 son irreducibles pero no primos;

(b) el ideal $\left\langle 2, 1 + \sqrt{-5}\right\rangle$ no es principal.

10 Sea A un anillo conmutativo. Un *máximo común divisor* de dos elementos $a, b \in A$ es un elemento $d \in A$ que cumple la siguiente propiedad:

$$c \mid d \qquad \Longleftrightarrow \qquad c \mid a \quad \text{y} \quad c \mid b.$$

Probar que:

(a) si el máximo común divisor de dos elementos existe, entonces es único salvo asociados;

(b) en un DFU, todo par de elementos tiene un máximo común divisor;

(c) en un DIP, el máximo común divisor entre dos elementos es una combinación lineal de los mismos;

(d) el ítem anterior no es cierto si reemplazamos la palabra DIP por DFU;

(e) en el anillo $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$, los elementos 4 y $2+2\sqrt{-3}$ no tienen un máximo común divisor.

11 Sean $A \subsetneq B$ dos anillos con B dominio íntegro, y sea f un polinomio con coeficientes en A.

(a) Mostrar con ejemplos que si f es irreducible en $A[X]$ entonces puede pasar que sea también irreducible en $B[X]$ o que deje de serlo.

(b) Probar que si A es un cuerpo y f es irreducible en $B[X]$, entonces también es irreducible en $A[X]$.

(c) Mostrar que el enunciado de (b) es técnicamente incorrecto si A no es un cuerpo, aunque por motivos poco interesantes. ¿Qué es lo que sí se puede concluir sobre f en $A[X]$ con esas hipótesis? ¿Qué hipótesis se puede agregar sobre f para que sí sea cierto el enunciado de (b)?

12 Sea A un DFU. Un polinomio $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in A[X]$ se dice *primitivo* si no existe ningún primo $p \in A$ que divida a todos los a_i.

Dados $f, g \in A[X]$, probar que el producto $f \cdot g$ es primitivo si y sólo si f y g lo son.

13 Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) si $S \subseteq \mathcal{U}(A)$, entonces $A_S \cong A$;

(b) si $0 \in S$, entonces $A_S \cong 0$.

14 Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Notar que podemos pensar a S como un subconjunto multiplicativamente cerrado de $A[X]$. Probar que $A[X]_S \cong A_S[X]$.

15 Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Consideremos un ideal $I \subseteq A$ y la proyección canónica $\pi \colon A \to A/I$. Probar que $(A/I)_{\pi(S)} \cong A_S/IA_S$.

16 Sean A un anillo conmutativo y $S, T \subseteq A$ dos subconjuntos multiplicativamente cerrados. Consideremos el morfismo canónico $i \colon A \to A_S$ y sea $U = ST = \{st : s \in S,\ t \in T\}$. Probar que $U \subseteq A$ es multiplicativamente cerrado y que $(A_S)_{i(T)} \cong A_U$.

17 (a) Supongamos que A es un dominio íntegro y sea $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Probar que la aplicación canónica $A \to A_S$ es inyectiva.

(*b*) Sean A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Dar condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación canónica $A \to A_S$ sea inyectiva.

18 Sean A un anillo conmutativo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Probar que $A \setminus \mathfrak{p}$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado. Notamos $A_{\mathfrak{p}}$ a la localización de A en $A \setminus \mathfrak{p}$.

19 Sea A un dominio íntegro. El *cuerpo de fracciones* de A se define como $\mathsf{Frac}(A) = A_{\mathfrak{p}}$ con $\mathfrak{p} = \{0\}$.

(*a*) Verificar que $\mathsf{Frac}(A)$ es un cuerpo.

(*b*) Probar que si K es un cuerpo y $f : A \to K$ es un morfismo de anillos inyectivo, entonces existe un único morfismo de anillos $\overline{f} : \mathsf{Frac}(A) \to K$ que extiende a f.

20 **(Teorema de la raíz racional de Gauss)** Sean A un DFU, $K = \mathsf{Frac}(A)$ el cuerpo de fracciones de A y $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in A[X]$. Probar que si $\frac{p}{q} \in K$ es raíz de f, con p, q coprimos, entonces $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$. Deducir que si $a_n \in \mathscr{U}(A)$ (por ejemplo, si f es mónico) entonces todas las raíces en K del polinomio f están en A.