# Práctica 5: Anillos

**1** Sea $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Verificar que $\mathbb{Z}[i]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$. ¿Es un cuerpo?

**2** Sea $A$ un anillo y $n \in \mathbb{N}$.

($a$) Verificar que $M_n(A)$, las matrices de $n \times n$ con entradas en $A$, forman un anillo con las operaciones de suma y producto usuales de matrices.

($b$) Probar que el centro de este anillo está formado por las matrices de la forma $a \cdot Id$ con $a \in A$ (se llaman *matrices escalares*).

**3** Sean $A$ un anillo y $X$ un conjunto no vacío. Denotamos $A^X = \{f : X \to A \mid f \text{ es función}\}$. Probar que $A^X$ es un anillo con las operaciones definidas por

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

**4** Sea $\mathscr{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$.

($a$) Probar que $\mathscr{C}[0,1]$ es un subanillo de $\mathbb{R}^{[0,1]}$.

($b$) Hallar las unidades y los divisores de cero de este anillo.

**5** Sea $G$ un grupo abeliano y sea $A = End(G)$. Verificar que $(A, +, \circ)$ es un anillo, donde $+$ es la suma de funciones punto a punto y $\circ$ es la composición.

**6** Dado un anillo $A$ se define $A[\![X]\!]$ como el conjunto de las *series formales* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ con $a_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

($a$) Verificar que $A[\![X]\!]$ es un anillo con las siguientes operaciones:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) X^n.$$

($b$) Probar que si $A$ es conmutativo entonces $A[\![X]\!]$ también lo es.

($c$) Probar que un elemento $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ es una unidad de $A[\![X]\!]$ si y sólo si $a_0$ es una unidad de $A$.

**7** Sean $A$ un anillo y $a, b, c \in A$ tales que $ab = ca = 1$. Probar que $b = c$. *(En otras palabras, si un elemento es inversible a izquierda y a derecha, entonces estos inversos coinciden.)*

**8** Sean $A$ un anillo y $a \in A$. Probar que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n$ es unidad, entonces $a$ es unidad.

**9** En un anillo $A$, un elemento $a \in A$ se dice **nilpotente** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$.

($a$) Probar que si $a$ es nilpotente entonces $1 - a$ es unidad.

($b$) Probar que si $a, b$ son elementos nilpotentes tales que $ab = ba$, entonces $a + b$ es nilpotente.

**10** Probar que todo dominio íntegro finito es un cuerpo.

**11** Recordemos que dado un anillo $A$, siempre existe un único morfismo de anillos $f : \mathbb{Z} \to A$. Llamamos *característica* del anillo $A$ al único entero no negativo $n$ tal que $\ker(f) = n\mathbb{Z}$.

Notar que se puede definir equivalentemente la característica de $A$ como el menor entero positivo $n$ tal que $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ sumandos}} = 0$ en $A$, o 0 en caso de que no exista tal $n$.

($a$) Probar que si $A$ tiene característica $n > 0$, entonces $\underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ sumandos}} = 0$ para todo $x \in A$.

($b$) Probar que si $A$ es un dominio íntegro entonces la característica de $A$ es 0 o un número primo.

**12** En cada uno de los siguientes casos, decidir si la función dada es un morfismo de anillos.

($a$) $A$ anillo, $a \in A$ fijo, $\varphi : A[X] \to A$ dada por $\varphi(f) = f(a)$.

($b$) $k$ cuerpo, $n > 1$ entero, $\varphi : M_n(k) \to k$ dada por $\varphi(M) = \det(M)$.

($c$) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = \bar{z}$.

**13** ($a$) Probar que para cada anillo $A$ hay **a lo sumo** un morfismo de anillos de $\mathbb{Q}$ en $A$.

($b$) Dar un ejemplo de un anillo $A$ para el cual no hay **ningún** morfismo de anillos $f : \mathbb{Q} \to A$.

**14** En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe algún morfismo de anillos $f : A \to B$:

($a$) $A$ un anillo cualquiera, $B = M_n(A)$.

($b$) $A = \mathbb{Z}[i]$, $B = \mathbb{R}$.

($c$) $A = M_2(\mathbb{C})$, $B = \mathbb{C}$.

**15** Sea $p$ un número primo. Probar que si $A$ es un anillo conmutativo de característica $p$ entonces la función $\sigma : A \to A$ dada por $\sigma(x) = x^p$ es un morfismo de anillos.

**16** ($a$) Probar que el único morfismo de anillos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la identidad.

($b$) Hallar todos los morfismos de anillos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

**17** Sean $A$ un anillo y $G$ un grupo. Probar que la asignación

$$\begin{aligned} \hom(\mathbb{Z}[G], A) &\to \hom(G, \mathcal{U}(A)) \\ f &\mapsto f|_G \end{aligned}$$

está bien definida y es biyectiva. *(Notar que el primer* hom *es de anillos y el segundo es de grupos.)*

**18** Sean $k$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$.

($a$) Dado un subespacio vectorial $V \subseteq k^n$, consideramos $I_V$ el subconjunto de $M_n(k)$ formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a $V$. Probar que $I_V$ es un ideal a izquierda de $M_n(k)$.

($b$) Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(k)$ es de la forma $I_V$ para algún subespacio $V$ de $k^n$.

**19** Sean $A$ un anillo y $n \in \mathbb{N}$.

($a$) Dado un ideal bilátero $I \subseteq A$, consideramos $M_n(I)$ el subconjunto de las matrices de $M_n(A)$ que tienen todos sus coeficientes en $I$. Probar que $M_n(I)$ es un ideal bilátero de $M_n(A)$.

($b$) Probar que si $J \subseteq M_n(A)$ es un ideal bilátero, entonces existe un ideal bilátero $I \subseteq A$ tal que $J = M_n(I)$.

($c$) Deducir que si $k$ es un cuerpo entonces el anillo $M_n(k)$ es *simple*, es decir, sus únicos ideales biláteros son 0 y $M_n(k)$.

**20** Probar que:

($a$) $A[X]/\langle X-1\rangle \cong A$ para todo anillo $A$;

($b$) $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$ para todo anillo $A$ e ideal bilátero $I$.

**21** Sean $A$ un anillo e $I$ un ideal bilátero de $A$. Definimos $I[X]$ como el subconjunto de $A[X]$ formado por los elementos $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ tales que $a_i \in I$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$ (es decir, los polinomios de $A[X]$ cuyos coeficientes están todos en $I$).

Probar que $I[X]$ es un ideal bilátero de $A[X]$ y que $A[X]/I[X] \cong (A/I)[X]$.

**22** Probar que $\mathbb{R}[X]/\langle X^2-1\rangle$ no es un cuerpo.