Práctica 4: Grupos abelianos finitamente generados

1 Clasificar todos los grupos abelianos de orden 18, 100 y 243.

2 Hallar los factores invariantes de los siguientes grupos:

(a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$

(b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$

(c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$

3 Sea $G = \mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{60}$. Calcular la cantidad de elementos de orden 5, 6, 9, 20 y 72 de G. **(Rtas: 4, 182, 54, 96, 1728)**

4 En cada caso, hallar los factores invariantes de G a partir de la información dada.

(a) G es un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y no tiene elementos de orden 4.

(b) G es un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y además tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

5 Decidir si los siguientes grupos son isomorfos:

$$G = \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{126} \oplus \mathbb{Z}_{28} \oplus \mathbb{Z}_{200} \quad \text{y} \quad H = \mathbb{Z}_{70} \oplus \mathbb{Z}_{140} \oplus \mathbb{Z}_{168} \oplus \mathbb{Z}_9.$$

6 Sea G un grupo abeliano finito que <u>no</u> es cíclico. Probar que G contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ para algún primo p.

7 Sea p un número primo y sea G un grupo abeliano de orden p^k. Sea S el conjunto de los elementos de orden máximo de G, es decir, $S = \{x \in G : \text{ord}(x) \geq \text{ord}(g) \text{ para todo } g \in G\}$. Demostrar que $G = \langle S \rangle$.

8 Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que para todo d divisor de n, existe un subgrupo de G que tiene orden d.

9 Sean G, H, K grupos abelianos finitamente generados.

(a) Probar que si $G \oplus G \cong H \oplus H$ entonces $G \cong H$.

(b) Probar que si $G \oplus H \cong G \oplus K$ entonces $H \cong K$.

(c) Mostrar que la implicación del ítem anterior no vale si G no es finitamente generado.
Sugerencia. Buscar un contraejemplo con $G = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

10 Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Hallar los factores invariantes del grupo $G = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$.

Sugerencia. Analizar por separado los casos $(m : n) = 1$ y $(m : n) > 1$.

11 Sean G un grupo abeliano finito y p un número primo que divide a $|G|$. Probar que la cantidad de elementos de orden p en G es de la forma $p^k - 1$ para cierto $k \in \mathbb{N}$.

12 Hallar los factores invariantes de los siguientes grupos expresados como cociente:

(a) $G = \mathbb{Z}^3 / \langle (3,3,6); (9,3,12); (-3,9,2) \rangle$.

(b) $G = \mathbb{Z}^3 / S$, donde $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 : 2 \mid x_1,\ 3 \mid x_2,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.