# Práctica 3: Acciones, producto semidirecto, teoremas de Sylow

**1** Sean $G = \mathbb{R}^\times$ (es decir, $\mathbb{R} - \{0\}$ con la operación de multiplicar) y $X = \mathbb{R}_{>0}$. Probar que la fórmula $a \cdot x := x^a$ define una acción de $G$ en $X$. ¿Cuáles son las órbitas de esta acción? ¿Cuál es el estabilizador de cada elemento $x \in X$?

**2** Sean $G$ un grupo finito, $H$ y $K$ dos subgrupos de $G$, y $X = HK$.

(*a*) Probar que la fórmula $(h,k) \cdot x := hxk^{-1}$ define una acción de $H \times K$ en $X$.

(*b*) Probar que la acción es transitiva y que el estabilizador de 1 es isomorfo a $H \cap K$.

(*c*) Deducir de lo anterior que $|H||K| = |HK||H \cap K|$.

**3** Sea $G$ un grupo de orden $pk$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $p > k$ es un número primo. Sea $H$ un subgrupo de orden $p$. Probar que $H$ es normal.

**4** Sea $G$ un grupo y sean $X$ e $Y$ dos conjuntos en los que actúa $G$. Notemos $F(X,Y)$ al conjunto de funciones de $X$ a $Y$. Una función $f : X \to Y$ se dice *$G$-equivariante* si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para cualesquiera $g \in G$ y $x \in X$.

(*a*) Probar que la fórmula $(g \cdot f)(x) := g \cdot f(g^{-1} \cdot x)$ define una acción de $G$ en $F(X,Y)$.

(*b*) Probar que una función $f : X \to Y$ es $G$-equivariante si y sólo si queda fija por la acción anterior.

**5** (*a*) Sea $G$ un grupo que actúa sobre un conjunto $X$, y sea $H$ un subgrupo normal de $G$. Hallar una condición necesaria y suficiente para que exista una acción de $G/H$ en $X$ tal que $\overline{g} \cdot x = g \cdot x$ para cualesquiera $g \in G$ y $x \in X$.

(*b*) Sean $G$ un grupo y $A \lhd G$ con $A$ abeliano. Probar que $\overline{g} \cdot a := gag^{-1}$ define una acción de $G/A$ en $A$.

**6** Sea $G$ un grupo finito de orden mayor que 2. Supongamos que existe un elemento $x \in G$ tal que la clase de conjugación de $x$ tiene exactamente 2 elementos. Probar que $G$ no es simple.

**7** Sean $G$ un grupo finito y $H$ un subgrupo propio.

(*a*) Probar que la fórmula $g \cdot xH := gxH$ define una acción de $G$ en $G/H$. Esto implica que la asignación

$$\rho \colon G \to S(G/H), \qquad \rho(g)(xH) = gxH$$

es un morfismo de grupos. Notaremos $K := \ker(\rho)$ e $I := \operatorname{im}(\rho)$.

(*b*) Probar que $K$ es un subgrupo de $H$, por lo tanto $|K|$ divide a $|H|$.

(*c*) Probar que $|I|$ divide a $[G : H]!$.

(*d*) Probar que si el índice de $H$ es el menor primo que divide al orden de $G$, entonces $|G/K| = [G : H]$. Deducir que $K = H$, y en particular $H$ es normal en $G$.

**8** Sea $p$ un primo y sea $V = \mathbb{F}_p^n$. Probar que $|GL_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)$.

**Sugerencia.** Una matriz de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{F}_p$ es inversible si y sólo si sus columnas forman una base de $\mathbb{F}_p^n$. Además $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base si y sólo si $v_1 \neq 0$ y $v_i \notin \langle v_1, v_2, \ldots, v_{i-1} \rangle$ para todo $i = 2, 3, \ldots, n$.

**9** Si $V$ es un espacio vectorial de dimensión $n$, una *bandera completa* en $V$ es una sucesión de subespacios $\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$.

($a$) Probar que $GL_n(k)$ actúa transitivamente en el conjunto de banderas completas de $k^n$.

($b$) Calcular el estabilizador de la bandera $0 \subsetneq \langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle$. ¿Cuántos elementos tiene?

($c$) Deducir que la cantidad de banderas completas de $\mathbb{F}_p^n$ es $\prod_{i=1}^{n-1}(1+p+p^2+\ldots+p^i)$.

**10** **(Lema de Burnside)** Sea $G$ un grupo finito actuando sobre un conjunto finito $X$. Denotamos $X/G = \{\mathcal{O}_x : x \in X\}$ al conjunto de órbitas de la acción y $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$ al conjunto de puntos fijos por un elemento $g \in G$.

($a$) Probar que

$$\sum_{g \in G} |X^g| = |\{(g,x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}| = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

($b$) Probar que $\sum_{x \in X} \frac{1}{|\mathcal{O}_x|} = |X/G|$.

($c$) Concluir que la cantidad de órbitas es igual al promedio de los puntos fijos:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

**11** Contar la cantidad de formas distintas de llenar un tablero de Ta-Te-Ti con 5 círculos y 4 cruces. *Consideramos que dos formas de llenar el tablero son iguales si podemos rotar o reflejar una para que coincida con la otra.* **(Rta: 23)**

**12** Un *grafo* (simple) se puede pensar como un conjunto $V$, sus *vértices*, junto con una familia $E$ de subconjuntos de dos elementos de $V$, sus *aristas*. Dos grafos $(V, E_1)$ y $(V, E_2)$ se dicen isomorfos si existe una función biyectiva $f : V \to V$ que cumple que $\{v_1, v_2\} \in E_1$ si y sólo si $\{f(v_1), f(v_2)\} \in E_2$. Calcular la cantidad de clases de isomorfismo de grafos cuyo conjunto de vértices es $\{1,2,3,4\}$. **(Rta: 11)**

**13** Sea $G$ un grupo.

($a$) Sean $N$ y $M$ dos subgrupos normales de $G$ y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que entonces es $G \cong N \times M$.

($b$) Supongamos que $G$ es grupo finito de orden $mn$ con $(m : n) = 1$. Mostrar que si $G$ posee exactamente un subgrupo $N$ de orden $n$ y exactamente un subgrupo $M$ de orden $m$, entonces $G \cong N \times M$.

**14** **(Producto semidirecto)** Sean $G$ y $N$ dos grupos y $\theta : G \to \mathrm{Aut}(N)$ un morfismo de grupos. Sea $K = N \times G$ y consideremos el producto en $K$ dado por

$$(n,g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \qquad \forall\ (n,g), (n',g') \in K.$$

Mostrar que con respecto a este producto $K$ es un grupo, el cual llamamos *producto semidirecto (o cruzado)* de $N$ por $G$ con respecto a $\theta$. Lo notamos $N \rtimes_\theta G$.

($a$) Probar que $\iota : N \to N \rtimes_\theta G, n \mapsto (n,1)$ y $\pi : N \rtimes_\theta G \to G, (n,g) \mapsto g$ son morfismos de grupos.

(*b*) Probar que $N \rtimes_\theta G$ es abeliano si y sólo si $\theta = 1$ y tanto $N$ como $G$ son abelianos, en cuyo caso $N \rtimes_\theta G = N \times G$.

$\boxed{\textbf{15}}$ **(Producto semidirecto interno)** Sea $K$ un grupo y sean $G$ y $N$ subgrupos de $K$ con $N$ normal en $K$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$.
(ii) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$.
(iii) Todo elemento de $K$ puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de $N$ por uno de $G$.
(iv) Todo elemento de $K$ puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de $G$ por uno de $N$.
(v) La composición de la inclusión $G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo.
(vi) Existe un morfismo $\sigma : K \to G$ que se restringe a la identidad de $G$ y cuyo núcleo es $N$.

Probar además que, cuando estas afirmaciones valen, existen un morfismo de grupos $\theta : G \to \mathrm{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_\theta G \to K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & N \rtimes_\theta G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"] & G \arrow[d, "\sim"] \\ N \arrow[r, hook] & K \arrow[r, two heads] & K/N \end{tikzcd}$$

$\boxed{\textbf{16}}$ Caracterizar todos los productos semidirectos $K = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_4$. Mostrar que uno de ellos es no abeliano y no isomorfo a $A_4$.

$\boxed{\textbf{17}}$ Probar que $GL_n(k)$ es un producto semidirecto de $SL_n(k)$ y $k^\times$.

$\boxed{\textbf{18}}$ Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semidirecto de forma no trivial.

$\boxed{\textbf{19}}$ Sea $p$ un primo impar. Probar que todo grupo de orden $2p$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{2p}$ o a $\mathbb{D}_p$.

$\boxed{\textbf{20}}$ Sea $p$ un primo. Probar que todo grupo de orden $p^2$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^2}$ o a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ (en particular, es abeliano).

$\boxed{\textbf{21}}$ Probar que todo subgrupo de orden 8 de $S_4$ es isomorfo a $\mathbb{D}_4$.

$\boxed{\textbf{22}}$ Probar que no hay grupos simples de orden 56 o 312.

$\boxed{\textbf{23}}$ Sea $G$ un grupo simple de orden 168. Probar que $G$ contiene exactamente 48 elementos de orden 7.

$\boxed{\textbf{24}}$ Sea $G$ un grupo de orden $p^r m$ con $p$ primo, $r \geq 1$ y $p > m$. Probar que $G$ no es simple.

$\boxed{\textbf{25}}$ Sea $G$ un grupo de orden $p^2 q$ con $p$ y $q$ primos distintos. Probar que $G$ no es simple.

$\boxed{\textbf{26}}$ Sea $G$ un grupo de orden $5 \cdot 7 \cdot 17$. Probar que $G$ es cíclico.