Práctica 2: Grupos - Morfismos y cocientes

1 Sean G un grupo, X un conjunto y $x_0 \in X$. Probar que la función $\mathrm{ev}_{x_0} : G^X \to G$ definida por $\mathrm{ev}_{x_0}(f) = f(x_0)$ es un morfismo de grupos.

2 Sean G y A grupos con A abeliano. Probar que $Hom(G,A)$ es un subgrupo de A^G.

3 Sean G un grupo y $g \in G$. Probar que la función $c_g : G \to G$ definida por $c_g(h) = ghg^{-1}$ es un automorfismo de grupos.

4 Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos.

(a) Probar que $f([G,G]) \subseteq [H,H]$.

(b) Deducir que si H es abeliano, entonces $[G,G] \subseteq \ker(f)$.

(c) ¿Es cierto en general que $f(Z(G)) \subseteq Z(H)$?

5 Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos y sea $g \in G$ un elemento de orden finito. Probar que el orden de $f(g)$ divide al orden de g.

6 Sea G un grupo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) G es abeliano.

(ii) La aplicación $(g,h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ es un morfismo de grupos.

(iii) La aplicación $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ es un morfismo de grupos.

(iv) La aplicación $g \in G \mapsto g^2 \in G$ es un morfismo de grupos.

7 Probar que los siguientes pares de grupos son isomorfos:

(a) G_n y $\mathbb{Z}_n$.

(b) G y G^{op}, donde G es cualquier grupo.

8 En cada uno de los siguientes casos, decidir si los grupos son isomorfos o no.

(a) S_3 y $\mathbb{D}_3$

(b) $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}_4$

(c) $\mathbb{Z}_8$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

(d) $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

9 (a) Probar que la aplicación $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ que manda $g \mapsto c_g$ es un morfismo de grupos. ¿Cuáles son los elementos de $\ker(\phi)$?

(b) A la imagen de ϕ se la denota $\mathrm{Inn}(G)$ (sus elementos se llaman *automorfismos interiores* de G). Probar que $\mathrm{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

10 Sea G un grupo. Un subgrupo $H \subseteq G$ se dice *característico* si para cada $f \in \mathrm{Aut}(G)$ se tiene que $f(H) \subseteq H$. Probar que:

(a) Si $H \subseteq G$ es un subgrupo característico, entonces $f(H) = H$ para todo $f \in \mathrm{Aut}(G)$.

(b) Los subgrupos $Z(G)$ y $[G,G]$ de G son característicos.

(c) Si H es un subgrupo característico de G, entonces H es normal en G.

(d) Si un grupo G posee un único subgrupo H de un orden dado, éste es característico.

(e) Si H es un subgrupo característico de G y K es un subgrupo característico de H, entonces K es un subgrupo característico de G.

11 Verificar que

$$\exp : \mathbb{R} \to S^1, \qquad \exp(t) = e^{2\pi i t}$$

es un morfismo de grupos sobreyectivo con núcleo $\mathbb{Z}$. Concluir que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

12 Verificar que:

(a) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0} \cong S^1$;

(b) $GL_n(k)/SL_n(k) \cong k^\times$ para todo cuerpo k y $n \in \mathbb{N}$;

(c) $S^1/G_n \cong S^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(d) si $m \mid n$, entonces $G_n/G_m \cong G_{n/m}$;

(e) si $m \mid n$, entonces $\mathbb{D}_n/\langle r^m \rangle \cong \mathbb{D}_m$.

13 Sea G un grupo. Probar que $G/Z(G) \cong \operatorname{Inn}(G)$.

14 Sea G un grupo y sean H, K subgrupos normales de G. Sean π_H y π_K las respectivas proyecciones al cociente.

(a) Consideremos la función $f : G \to G/H \times G/K$ dada por $f(x) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$. Notar que es un morfismo de grupos. ¿Cuál es su núcleo?

(b) Usando lo anterior probar que existe un monomorfismo $\overline{f} : G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$.

(c) Deducir que si G/H y G/K son abelianos y $H \cap K = \{1\}$ entonces G es abeliano.

15 Sea G un grupo.

(a) Mostrar que la función $\mathrm{ev}_1 : f \in Hom(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección y que si G es abeliano entonces es un isomorfismo de grupos.

(b) Describir $Hom(\mathbb{Z}_n, G)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(c) Probar que hay un isomorfismo de grupos $Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(n:m)}$.

16 Sea G un grupo.

(a) Probar que $G/[G,G]$ es un grupo abeliano.

(b) Probar que si $f : G \to K$ es morfismo de grupos y K es **abeliano**, entonces existe un único morfismo de grupos $\overline{f} : G/[G,G] \to K$ tal que $f = \overline{f} \circ \pi$, donde $\pi : G \to G/[G,G]$ es la proyección al cociente.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/[G,G] \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(c) Sea H un subgrupo de G. Probar que son equivalentes:

(i) H contiene a $[G,G]$.

(ii) $H \triangleleft G$ y G/H es abeliano.

17 Sea G un grupo. Probar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.