Práctica 1: Grupos - Primera parte

1 Probar que los siguientes conjuntos son grupos abelianos con el producto de números complejos. Determinar cuáles de ellos son cíclicos.

(a) $G_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$

(b) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

(c) $G_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{p^n}$, donde p es un número primo.

2 Sean k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos $M_n(k)$ al conjunto de las matrices de $n \times n$ con entradas en k. Se definen

$$GL_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\}$$
$$SL_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A = 1\}.$$

Probar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. ¿Cuándo son abelianos?

3 **(Grupo opuesto)** Sea $(G, \star)$ un grupo. El *grupo opuesto* de G es el conjunto $G^{op} = G$ con la operación $\star_{op}$ definida por

$$g \star_{op} h = h \star g.$$

Probar que $(G^{op}, \star_{op})$ es un grupo.

4 El *exponente* de un grupo G es el menor número natural e tal que para todo $g \in G$ se tiene $g^e = 1$, si es que existe algún e con esta propiedad.

(a) Probar que los grupos de exponente 2 son abelianos.

(b) Probar que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{Z}_3) : a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

es un grupo no abeliano de exponente 3.

5 Sean G un grupo y X un conjunto. Denotamos G^X al conjunto de todas las funciones de X en G, y allí definimos una operación $\star$ dada por $(f \star g)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in X$. Probar que $(G^X, \star)$ es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

6 Probar que el producto directo $G \times H$ es abeliano si y sólo si tanto G como H son abelianos.

7 Sea X un conjunto. Probar que $(\mathscr{P}(X), \Delta)$ es un grupo abeliano.

Nota. Recordar que $\mathscr{P}(X)$ es el conjunto de partes de X, integrado por los subconjuntos de X, y que Δ es la operación de diferencia simétrica, $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

8 Sean G un grupo y $H \subseteq G$ un subconjunto no vacío.

(a) Probar que H es un subgrupo de G si y sólo si para cada $x, y \in H$ se tiene que $xy^{-1} \in H$.

(b) Probar que si G es **finito**, entonces H es un subgrupo de G si y sólo si para cada $x, y \in H$ se tiene que $xy \in H$.

(c) Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

9 Sean G un grupo y H_1 y H_2 dos subgrupos de G. Probar que:

(a) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

(b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G si y sólo si $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$.

10 Sea H un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$. Probar que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n\mathbb{Z}$.

11 Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = G_n$.

12 (a) Probar que $\mathbb{Z} = \langle m, n \rangle$ si y sólo si m y n son coprimos.

(b) Probar que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un sistema de generadores *minimal* de k elementos para $\mathbb{Z}$, es decir: un subconjunto $X \subset \mathbb{Z}$ de k elementos tal que $\langle X \rangle = \mathbb{Z}$ pero para todo $Y \subsetneq X$ se tiene $\langle Y \rangle \neq \mathbb{Z}$.

13 Sea G un grupo con más de un elemento tal que sus únicos subgrupos son $\{1\}$ y G. Probar que G es cíclico y tiene orden primo.

14 Sean G un grupo y $g \in G$ un elemento de orden d. Calcular $\mathrm{ord}(g^n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

15 Sean G_1 y G_2 dos grupos y sean $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ elementos de orden finito. Probar que el orden del elemento (g_1, g_2) de $G_1 \times G_2$ es el mínimo común múltiplo de $\mathrm{ord}(g_1)$ y $\mathrm{ord}(g_2)$.

16 Sea G un grupo abeliano y sean $a, b \in G$ elementos tales que $\mathrm{ord}(a) = m$ y $\mathrm{ord}(b) = n$.

(a) Probar que $\mathrm{ord}(ab)$ **divide** al mínimo común múltiplo entre m y n.

(b) Probar que si m y n son coprimos entonces $\mathrm{ord}(ab)$ es **igual** al mínimo común múltiplo entre m y n.

(c) Mostrar con un contraejemplo que si m y n no son coprimos lo anterior puede ser falso.

17 Sean $\alpha, \beta \in GL_2(\mathbb{Z})$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificar que $\alpha^4 = \beta^3 = \mathrm{id}$.

(b) Probar que $\alpha\beta$ tiene orden infinito.

(c) Concluir que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

18 Sea G un grupo de orden p^m, con p primo y $m \in \mathbb{N}$. Probar que G tiene al menos un elemento de orden p.

19 Probar que en todo grupo finito de orden par hay al menos un elemento de orden 2.

20 Para cada uno de los siguientes grupos, contar cuántos elementos hay de cada orden posible.

(a) $\mathbb{Z}_{12}$ (b) $\mathbb{D}_{12}$ (c) S_5 (d) $S_3 \times S_3$

21 Sean G un grupo y $N \subseteq G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subseteq N$ para todo $g \in G$. Probar que N es normal.

22 Sean G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Probar que un subgrupo N de G es normal si y sólo si $xNx^{-1} = N$ para todo $x \in X$. Mostrar además que si G es finito entonces alcanza con pedir $xNx^{-1} \subseteq N$ para todo $x \in X$.

23 Sean $G = GL_2(\mathbb{Q})$ y $H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G$.

(a) Verificar que H es un subgrupo de G.

(b) Sea ahora $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Mostrar que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

24 Sea G un grupo. Dados dos subconjuntos $A, B \subseteq G$, definimos $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$. Supongamos que A y B son subgrupos de G. Probar que:

(a) AB es un subgrupo de G si y sólo si $AB = BA$.

(b) $G = AB$ si y sólo si $G = \langle A, B \rangle$ y $AB = BA$.

(c) Si A o B son normales en G, entonces AB es un subgrupo de G.

(d) Si tanto A como B son normales en G, entonces AB es un subgrupo normal de G.

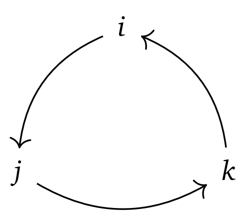
25 Para cada uno de los siguientes grupos, hallar todos sus subgrupos y determinar cuáles son normales:

(a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ (b) S_3 (c) $\mathbb{D}_4$

26 Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por las siguientes ecuaciones y la regla usual de los signos:

$$\begin{aligned} i \cdot j &= k, & j \cdot k &= i, & k \cdot i &= j, \\ j \cdot i &= -k, & k \cdot j &= -i, & i \cdot k &= -j, \end{aligned}$$
$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1.$$

El par $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano al que llamamos *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$:



Hallar todos los subgrupos de $\mathbb{H}$. ¿Cuáles son normales? ¿Qué conclusión sacamos de este ejemplo?

27 Sea G un grupo. Dados dos elementos $a, b \in G$, su *conmutador* se define como el elemento

$$[a,b] := aba^{-1}b^{-1}.$$

(a) Probar que a y b conmutan si y sólo si $[a,b] = 1$.

(b) Sea $X = \{[a,b] : a, b \in G\}$. El *conmutador* de G (también llamado *subgrupo derivado* de G) es el subgrupo $[G,G] := \langle X \rangle$. Probar que $[G,G]$ es un subgrupo normal en G.

(c) Probar que G es abeliano si y sólo si $[G,G] = \{1\}$.

(d) Calcular $[\mathbb{H},\mathbb{H}]$ y $[\mathbb{D}_n,\mathbb{D}_n]$.

28 Sea G un grupo. Su *centro* se define como el subgrupo

$$Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}.$$

Un elemento de $Z(G)$ se dice *central*.

(a) Mostrar que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G.

(b) Sean G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Mostrar que

$$Z(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ para todo } x \in X\}.$$

(c) Encontrar el centro de un grupo abeliano, de $\mathbb{D}_n$ para $n \geq 1$, de $\mathbb{H}$, y de $GL_n(k)$ para k un cuerpo y $n \geq 1$.

(d) Sean G un grupo y X un conjunto. Calcular el centro de G^X.