
ANÁLISIS NUMÉRICO

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica N° 6: Elementos Finitos.

Ejercicio 1 Probar que las normas

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \quad \text{y} \quad \|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

son equivalentes. Verificar que la norma de H^1 se deriva de un producto escalar.

Ejercicio 2 Considerar el problema: encontrar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{\Omega})$.

- i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?
- ii) ¿Cómo definiría una solución débil?
- iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iv) Probar que existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 3 Considerar el problema: encontrar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 , tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\bar{\Omega})$.

- i) Defina solución clásica y débil para este problema.
- ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iii) Probar que existe una solución única en $H^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 4 a) Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, probar que existe una constante C_0 tal que, para toda $u \in H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

b) Considerar el problema: encontrar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \end{cases}$$

con $f \in C(\bar{\Omega})$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ y $\Gamma_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$.

- i) Definir solución clásica y débil en un espacio adecuado $V \subset H^1(\Omega)$.
- ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iii) Probar que existe una solución única en V de la formulación débil.

Ejercicio 5 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq n$ que verifican la condición de elipticidad:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \chi_i \chi_j \geq \alpha |\chi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0$$

Sea también $a_0(x) \in C(\bar{\Omega})$. Se busca una función $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

- i) Defina solución clásica y débil para este problema.
- ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
- iii) Probar que para $a_0(x) \geq 0$ en Ω y $f \in L^2$ existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 6 (a) Dado el problema variacional

$$a(u, v) = \int f v \quad \text{para todo } v \in V$$

con $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Considere la respectiva aproximación de Galerkin sobre un espacio discreto $V_h = V_h^1 \oplus V_h^2 \subset V$ que posee la propiedad de que $a(v_h^1, v_h^2) = 0$ para todo par $v_h^1 \in V_h^1, v_h^2 \in V_h^2$. Demuestre que $u_h = u_h^1 + u_h^2$ es solución de la aproximación de Galerkin si y solo si los u_h^i resuelven respectivamente

$$a(u_h^i, v_h^i) = \int f v_h^i \quad \text{para todo } v_h^i \in V_h^i$$

(b) Tome $a(u, v) = \int_0^1 u' v'$ y $V = H_0^1(0, 1)$ en el ítem previo y considere $(0, 1) = I = \cup_{i=0}^{N-1} I_i$, $I_i = (x_i, x_{i+1})$, con $x_{i+1} = x_i + h$. Tome entonces

$$V_h^1 = \{u \in H_0^1 \text{ tal que } u \in P_1(I_i) \text{ para todo } 0 \leq i \leq N-1\} = \langle \phi_1, \dots, \phi_{N-1} \rangle$$

con $\phi_i(x_j) = \delta_i^j$, y sea $V_h^2 = \langle \hat{\phi}_0, \dots, \hat{\phi}_{N-1} \rangle$ con

$$\hat{\phi}_i = \begin{cases} \frac{4}{h^2}(x - x_i)(x_{i+1} - x) & x \in I_i \\ 0 & x \in I - I_i \end{cases}$$

Demuestre que $V_h = V_h^1 \oplus V_h^2$ está en las hipótesis del ítem previo, y entonces se pide hallar los β_i que verifican $u_h = \sum \alpha_i \phi_i + \beta_i \hat{\phi}_i$.

Ejercicio 7 Dar dos ejemplos de formas bilineales $(a_{i,j})$ diferentes, que corresponden a formas variacionales distintas, pero den lugar al mismo operador diferencial.

Ejercicio 8 Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$. Sea T_h una subdivisión de Ω en elementos K (intervalos en \mathbb{R} , triángulos o cuadriláteros en \mathbb{R}^2 , tetraedros en \mathbb{R}^3). Probar que una función definida en todo Ω y que es polinomial en cada elemento, pertenece a $H^1(\Omega)$ si y sólo si es continua en Ω .

Ejercicio 9 Encontrar la dimensión de los siguientes espacios de funciones, definidas sobre un elemento K en \mathbb{R}^2 :

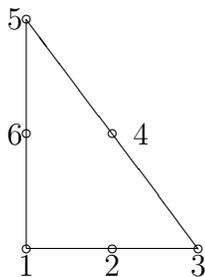
- i) funciones lineales
- ii) funciones cuadráticas
- iii) $P_r(K) = \{v : v \text{ es un polinomio de grado } \leq r \text{ sobre } K\}$
- iv) funciones bilineales ($v = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$).

Ejercicio 10 Sea C_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (es decir, una subdivisión de Ω en triángulos que no se superponen, y tal que los vértices de ningún triángulo se encuentran sobre los lados de otro triángulo).

- i) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω , lineales en cada triángulo de C_h . Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω). Verificar que la función resulta continua.
- ii) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω , cuadráticas en cada triángulo de C_h . Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por ejemplo por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω) y en el punto medio de cada lado de los elementos de C_h .

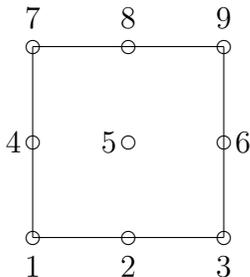
Ejercicio 11 Sea T_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω , cuadráticas en cada triángulo de T_h .

- i) Explicar como elegiría los nodos en cada triángulo para garantizar que una función en V_h esté unívocamente determinada por su valor en los nodos elegidos.
- ii) Considere ahora el triángulo de referencia y los nodos n_j , $1 \leq j \leq 6$ como se indica en la Figura. Hallar ϕ_i , $1 \leq i \leq 6$ las funciones en V_h que satisfacen $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$.



Ejercicio 12 Sea Q_h una subdivisión en rectángulos Q , con lados paralelos a los ejes coordinados de un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω , tal que en cada rectángulo es una función de $Q_2 = \{v : v = \sum c_j p_j(x) q_j(y)\}$ donde p_j y q_j son polinomios de grado menor o igual a 2.

- i) Explicar como elegiría los nodos en cada rectángulo para garantizar que una función en V_h esté unívocamente determinada por su valor en los nodos elegidos.
- ii) Considere ahora el rectángulo de referencia $[0, 1]^2$ y los nodos n_j , $1 \leq j \leq 6$ como se indica en la Figura. Hallar ϕ_i , $1 \leq i \leq 6$ las funciones en V_h que satisfacen $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$.



Ejercicio 13 Consideremos $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio con borde poligonal, y T_h una triangulación del mismo. Sea $K \subset T_h$ un triángulo de la partición. Llamamos:

h_K = mayor de los lados de K ,

ρ_K = diámetro del círculo inscrito en K ,

$h = \max_{K \in T_h} h_K$.

Probar que la condición $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \beta \quad \forall K \in T_h$ es equivalente a que exista $\theta_0 > 0$ tal que para cualquier ángulo θ de cualquier triángulo $K \in T_h$ se tiene $\theta \geq \theta_0$ (esta condición es conocida como “condición del ángulo mínimo”).

Ejercicio 14 Sea Q un rectángulo en \mathbb{R}^2 , con lados paralelos a los ejes. Considerar una subdivisión C_h de Q en subrectángulos que no se solapan tal que ningún vértice de ningún rectángulo pertenece al lado de otro rectángulo. Sea V_h el conjunto de funciones continuas definidas en Q , bilineales en cada subrectángulo. Probar que un elemento de V_h está unívocamente determinado por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los nodos en el borde de Q).

Ejercicio 15 Se desea aproximar

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x}) d\hat{x}$$

donde \hat{T} es el triángulo de referencia que tiene vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

a) Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x})d\hat{x} \sim \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.

b) Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x})d\hat{x} \sim \frac{1}{6}\left(f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

Ejercicio 16 Sea T un triángulo genérico (no degenerado) de vértices a_1, a_2, a_3 . Sea $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ la transformación afín que transforma \hat{T} en T . Usando el ejercicio 15 a) y haciendo un cambio de variables mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim |T|f(a_{123}),$$

donde a_{123} es el baricentro del triángulo T , es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

Ejercicio 17 Procediendo en forma análoga al ejercicio previo y usando el ejercicio 15 b), mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim \frac{|T|}{3}\left(f(a_{12}) + f(a_{13}) + f(a_{23})\right)$$

donde $a_{ij}, i < j$ denota el punto medio del lado de vértices a_i y a_j , es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

Ejercicio 18 i) Considerar el tetraedro de referencia:

$$\hat{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Si $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ y \hat{a}_4 son los vértices de \hat{T} Probar que la cuadratura:

$$\hat{Q}(f) = \frac{1}{6}f(\hat{a}_{1234}), \quad \text{siendo } \hat{a}_{1234} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4}{4}$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

ii) Probar que el volumen de un tetraedro con vértices: el origen, A, B y C viene dado por:

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

siendo x_A la coordenada x del vértice A , etc.

iii) Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ el tetraedro con vértices a_1, a_2, a_3, a_4 . Deducir, a partir del ítem anterior, una cuadratura sobre T que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

Ejercicio 19 i) Dado un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, definimos $\mathcal{Q}_1(R) = \{f(x, y) = p(x)q(y), p, q \in \mathcal{P}_1\}$. Probar que la cuadratura

$$\int_R f \sim \frac{|R|}{4} (f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d))$$

es exacta para $f \in \mathcal{Q}_1$.

iii) Considerar el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega = [-1, 1] \times [0, 1] \\ u(x, y) = 0 & \text{si } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

y la partición $\Omega = R_1 \cup R_2$, donde $R_1 = [-1, 0] \times [0, 1]$ y $R_2 = [0, 1]^2$. Escribir las bases locales de \mathcal{Q}_1 sobre R_1 y R_2 (teniendo en cuenta los datos de borde), y calcule la matriz de rigidez usando la cuadratura del ítem anterior.

Ejercicio 20 Considerar la subdivisión del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ que se obtiene trazando dos rectas paralelas a los ejes, y consiste de cuatro cuadrados. Numerar los nodos de la siguiente manera: $N_1 = (0, 0), N_2 = (1, 0), N_3 = (1, 1), N_4 = (0, 1), N_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), N_6 = (1/2, 0), N_7 = (1, 1/2), N_8 = (1/2, 1), N_9 = (0, 1/2)$. Hallar la solución del sistema variacional discreto del ejercicio 2 con $f = 1$, usando elementos finitos bilineales .

Ejercicio 21 Hacer un programa para resolver la ecuación de Poisson $-\Delta u = f$ con condición de borde $u|_{\partial\Omega} = 0$, en un polígono convexo Ω usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error $\|u - u_h\|$ en diversas normas y graficar en función de h .

Ejercicio 22 Hacer un programa para resolver la ecuación $-\Delta u + u = f$ con condición de borde $u|_{\partial\Omega} = g$, en un polígono convexo Ω usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error $\|u - u_h\|$ en diversas normas y graficar en función de h .

Ejercicio 23 (a) Considere el tetraedro de referencia:

$$\hat{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son los vértices de \hat{T} y x_5 su baricentro, determine valores w_1, w_2, w_3, w_4 y w_5 de manera que la cuadratura:

$$\int_{\hat{T}} f \sim \sum_{i=1}^5 w_i f(x_i)$$

sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2. (Sug.: aproveche las simetrías del problema para simplificar las cuentas).

- (b) Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ el tetraedro con vértices a_1, a_2, a_3, a_4 . Deduzca, a partir del ítem anterior, una cuadratura sobre T que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.
- (c) ¿Qué dimensión tiene $\mathcal{P}_1(T)$?
- (d) Pruebe que todo polinomio de $\mathcal{P}_1(\widehat{T})$ queda unívocamente determinado por su valor en las esquinas de \widehat{T} .

Ejercicio 24 [Lema de Aubin-Nitsche] Considerar el problema $-\Delta u = f$ en Ω con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y $f \in L^2$. Sea \mathcal{T}_h una triangulación de Ω de tamaño h y V_h el espacio de las funciones lineales a trozos que satisfacen las condiciones de contorno. Notamos $u_h \in V_h$ a la aproximación de u por elementos finitos. Probar que:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Concluir que si vale la estimación a priori $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, se tiene que:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(**Sug.:** Considerar el problema auxiliar $-\Delta w = u - u_h$.)

Ejercicio 25 Dada $f \in L^2(0,1)$ $0 < \alpha \leq 1$, considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u' = f & \text{en } (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

- (a) Plantear el Problema Variacional asociado y mostrar que existe una única solución.
- (b) Plantear el Problema Variacional Discreto asociado si se usa el subespacio $V_h \subset V$ en donde

$$V_h = \{v \in V : v|_I \in \mathcal{P}_1\}.$$

Mostrar que existe solución única de este problema. Sean u la solución del Problema Variacional y u_h la del Problema Variacional Discreto, mostrar que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \rightarrow 0.$$

- (c) Asumiendo que $u \in H^2(0,1)$ y que existe $c > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(0,1)} \leq c\|f\|_{L^2(0,1)}$, probar que se tiene convergencia cuadrática en $L^2(0,1)$, es decir, que existe $k > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq kh^2 \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Ejercicio 26 Dado $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado Lipschitz con frontera poligonal, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ considerar el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

- (a) Plantear el Problema Variacional asociado y mostrar que existe una única solución. Probar que la solución clásica es solución del problema variacional.

(b) Plantear el Problema Variacional Discreto asociado si se usa el subespacio $V_h \subset V$ en donde

$$V_h = \{v \in V : v|_T \in \mathcal{P}_1(T)\}.$$

Mostrar que existe solución única de este problema. Sean u la solución del Problema Variacional y u_h la del Problema Variacional Discreto, mostrar que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

(c) Probar que se tiene convergencia cuadrática en $L^2(\Omega)$.

Sug: Usar el siguiente resultado:

Regularidad de solución y Estimación a priori: Dada $F \in L^2(\Omega)$, y w la solución del problema $-\Delta w + w = F$, con condiciones de borde Dirichlet y/o Neumann homogéneas, entonces es sabido que $w \in H^2(\Omega)$ y que existe $C > 0$ tal que $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|F\|_{L^2(\Omega)}$.