Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica N° 5: Elementos Finitos 1D

Espacios de Sobolev

Ejercicio 1 a) Probar que la función definida como $h(x) = \exp(-1/x^2)$ para $x > 0$, $h(x) = 0$ para $x \leq 0$, pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$.

b) Probar que la función $g(x) = h(x-a)h(b-x)$, $a < b$ es $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $[a, b]$.

c) Construir una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en una bola o en un intervalo.

Ejercicio 2 a) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\, dx = 0\ \forall g \in L^2(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

b) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\, dx = 0$ para toda $g \in C_0^k(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

c) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\, dx = 0$ para toda $g \in C_0^\infty(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

Ejercicio 3 a) Demostrar que si $f, g \in L^p$ son tales que $\int_I f\phi' = -\int_I g\phi$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces g es única.

b) Si la f del item previo es derivable entonces $f' = g$.

Ejercicio 4 a) Dada una función $\psi \in C_0^0(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$ probar que $\theta = \omega - (\int_I \omega)\psi \in C_0^0(I)$ para todo $\omega \in C_0^1(I)$, además $\int_I \theta = 0$.

b) Si $I = (a, b)$, sea $\phi(x) = \int_a^x \theta$, probar que $\phi(x) \in C_0^1(I)$, más aún $\phi' = \theta$.

c) Si f en L^1_{loc} y $\int_I f\phi' = 0$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces $f = cte$ c.t.p. (Sug. tomar ϕ como en el item previo y utilizar el Ejercicio 2).

Ejercicio 5 Si $g \in L^1_{loc}(I)$ tomar $c \in I$ cualquiera, y escribir para $x \in I$ $\int_c^x g = v(x)$, entonces $\int_I v\phi' = -\int_I g\phi$ para todo $\phi \in C_0^1(I)$.

Ejercicio 6 Utilizando el ejercicio previo y tomando f y g como en el Ejercicio 3 deducir la identidad $f(x) = f(c) + \int_c^x g$ para casi todo x.

Ejercicio 7 Probar que si $f \in H^1(I)$ entonces $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}$.

Ejercicio 8 Usando el ejercicio previo demostrar que si $u \in H_0^1(I)$, con $I = (a, b)$ entonces $u(a) = u(b) = 0$. Probar, utilizando este hecho, que para I acotado en $\mathbb{R}$ existe una constante C (dependiente de $|I|$) tal que

$$\|u\|_{L^2} \le C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1 \qquad \text{(Desigualdad de Poincaré)}$$

y por ende

$$\|u\|_{H^1(0.1)} \le C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1$$

Ejercicio 9 Sea $I = (-1, 1)$. Comprobar que:

a) La función $u(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ pertenece a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \le p \le \infty$ y que $u' = H$, donde H es la función de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

b) La función $H \notin W^{1,p}$ para $1 \le p \le \infty$.

Ejercicio 10 Sea

$$u(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)\|^\epsilon}$$

con $0 < \epsilon < 1$ y $(x, y) \in B_R(0)$.

a) Probar que u tiene derivadas generalizadas de primer orden en $L^1(B_R(0))$; $u \in L^2(B_R(0))$ pero u no tiene representante continuo en $B_R(0)$.

b) Encontrar los valores de p para los que $u \in W^{1,p}(B_R(0))$.

Ejercicio 11 a) Demostrar que la función

$$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^{\frac{1}{3}}$$

está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ donde $B_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$.

b) ¿Para que valores de α la función $u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2))|^\alpha$ está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$?

Concluir que las funciones de H^1 no son necesariamente acotadas y por ende el resultado del Ejercicio 7 no se extiende a más dimensiones.

Teoría de Elementos Finitos 1D

Ejercicio 12 Probar que las siguientes formas bilineales son continuas y coercitivas en los respectivos espacios V

a) $V = \mathbb{R}^n$, $a(u, v) = vAu^t$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A definida positiva.

b) $V = L^2(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$, con $\rho(x) > 0$ y continua en $[0, 1]$.

c) $V = H^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x) + u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$, con $\rho_i(x) > 0$ y continuas en $[0,1]$.

d) $V = H_0^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$, $\rho(x) > 0$, continua en $[0,1]$.

e) $V = H^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$ con ρ_i como en los items previos, y k constante suficientemente chico. Es esta forma bilineal simétrica?

Ejercicio 13 Para los problemas 3 y 5 de la práctica anterior

a) Probar que existe una solución única en $H_0^1(I)$ de la formulación débil.

b) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a $C^2(\overline{I})$), y que proporciona una solución clásica.

Ejercicio 14 Sea $I = (0,1)$ y sean x_i tales que $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$ una partición de I.

a) Definimos para cada $1 \leq i \leq N-1$, $\quad G_i(x) = \begin{cases} (1-x_i)x & 0 \leq x \leq x_i \\ x_i(1-x) & x_i \leq x \leq 1 \end{cases}$ Verificar que $G_i \in H_0^1(0,1)$ y que $\forall w \in H_0^1(0,1)$ se tiene que

$$\int_0^1 w'(s)G_i'(s)ds = w(x_i)$$

b) Dada $f \in L^2(0,1)$ considerar el problema

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Escribir el problema en forma variacional sobre H_0^1 y dar formulación aproximada de Galerkin utilizando el espacio

$$V_h = \{u \in H_0^1 \ \text{ tal que } \ u \in P_1(I_i) \ \text{ para todo } \ 0 \leq i \leq N-1\}$$

- Demostrar que ambos problemas variacionales tienen solución única.
- Demostrar que $\int_0^1 (u - u_h)'v_h' = 0$ para todo $v_h \in V_h$. De aquí y del item previo concluya que $u(x_i) = u_h(x_i)$, i.e, la solución obtenida numéricamente interpola a u en los nodos (aquí u_h denota la solución del problema discreto). Verificar que efectivamene, en el ejercicio 9 de la práctica 4 sucede eso.

c) Hallar la matriz de rigidez (usando las basesde Lagrange).

Ejercicio 15 Demostrar que el problema variacional del ejercicio 14 de la práctica anterior tiene solución única sobre $H_0^2(0,1)$.

Ejercicio 16 Considerar el problema:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) = f(x) \text{ en } I = (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con $a \in C^1(\bar{I})$ y $b, f \in C(\bar{I})$.

a) Plantear la formulación débil del problema, en un espacio adecuado V.

b) Demostrar que para toda $u \in V$ se tiene que:

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(I)}$$

c) Probar que si $a \geq \alpha > 0$ y

$$\|b\|_\infty \leq \frac{1}{2} \min_{x \in [0,1]} a(x)$$

entonces existe una única solución del problema débil.

d) Probar que la solución débil es también solución del problema continuo.

Ejercicio 17 Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + \beta u' = f & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

siendo $\beta > 0$.

a) Plantear la formulación débil de este problema, de la forma:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \tag{1}$$

para un espacio adecuado V.

b) Probar que F y a son continuas, y que si β es suficientemente chico, a es coercitiva. Concluya existencia y unicidad de solución para el problema débil.

c) Sea $\mathcal{T}_h$ una partición unifome del intervalo $[0,1]$, de parámetro $h > 0$ dada por $\{x_i\}$, $x_i = ih$. Sea

$$V_h = \{f \in C([0,1]) : \; f|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1\}.$$

Considerar el problema discretizado:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h \tag{2}$$

Si $u_h \in V_h$ es la solución de (2), y u es la solución de (1), probar, utilizando el lema de Cèa, que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ejercicio 18 Dada $f \in L^2(0,1)$, considere el siguiente problema:

$$\begin{cases} u \in C^2[0,1] \\ -u''(x) + au'(x) + u(x) = f(x) \qquad 0 < x < 1, \quad a \in \mathbb{R} \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la forma débil en un espacio adecuado V.

b) Probar que si $u \in C^2([0,1])$ es una solución débil entonces es solución clásica del problema (incluyendo las condiciones de borde).

c) Probar que si $u \in H^1(0,1)$ y $u(0) = 0$, entonces vale la desigualdad de Poincaré.

d) Probar que si $|a| < 2$, existe una solución única en V de la formulación débil.

e) Describir un espacio aproximante $V_h \subset V$, adecuado para este problema, y mostrar una base.

Ejercicio 19 Sea $I = (0,1)$ y $k(x)$ la función

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x \in I_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ k_2 & \text{si } x \in I_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

con $k_1, k_2 > 0$ constantes. Considerar el problema variacional: Hallar $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$\int_I k(x) u' v' \, dx = \int_I v \qquad \forall v \in H_0^1(I). \tag{3}$$

a) Probar que (3) tiene una única solución u.

b) Probar que u es solución (en sentido clásico) de

$$\begin{cases} -k(x)u'' = 1 & \text{en } I_1 \cup I_2 \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \text{ continua en } x = \dfrac{1}{2} \\ k_1 u'\left(\dfrac{1}{2}^{(-)}\right) = k_2 u'\left(\dfrac{1}{2}^{(+)}\right). \end{cases}$$

c) Discretizar la ecuación usando elementos finitos lineales sobre una malla uniforme con $2N$ intervalos de longitud $h = \frac{1}{2N}$. Hallar la matriz de rigidez y el vector independiente del sistema resultante de tamaño $(2N-1) \times (2N-1)$.

d) Interpretar desde el punto de vista de diferencias finitas cómo queda impuesta la condición sobre la derivada de u en $x = \frac{1}{2}$ en la discretización dada en (c).