Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2024

TP N° 2. Elementos Finidos 2D

Dada $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta u & = f(x,y) & \Omega \\ u & = g(x,y) & \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = 0 & \Omega \backslash \Gamma_1 \end{cases} \tag{1}$$

Implementación FEM y orden de convergencia

En esta primera parte el objetivo es resolver el problema (1) utilizando un método de elementos finitos lineales. Para esto contará con la libreria `lib_fem.jl`[1] que incluye diferentes funciones que serán de utilidad.

El primer paso será implementar el método y luego testear el orden de convergencia en las normas L^2 y H^1.

Consideremos

$$\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$$

$$\Gamma_1 = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, y = -1\} \cup \{(x,y) : -1 \leq y \leq 1, x = -1\}$$

$$f(x,y) = x - x^2/2 + y - y^2/2$$

$$g(x,y) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(y - y^2/2) & \text{si } x = -1 \\ -\frac{3}{2}(x - x^2/2) & \text{si } y = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 1 Sabiendo que la solución exacta al problema es $u(x,y) = (x - x^2/2)(y - y^2/2)$, crear una malla Ω_h adecuada y realizar un gráfico de esta función (*Sugerencias:* Usar las funciones `rectangle_mesh` y `plot_u`).

Ejercicio 2 Implementar una función `fem_solve` que resuelva el problema usando elementos finitos lineales. La misma debe tomar como parámetros a Ω_h, la función f y el dato g. Resolver el problema para la malla usada en el ejercicio previo y realizar un gráfico de la solución obtenida. (*Sugerencias:* Para el cálculo de las integrales en cada triangulo usar la regla de cuadratura que viene dada por el ejercicio 17 de la Práctica 6. Para realizar el gráfico usar la función `plot_u`.).

Ejercicio 3 Implementar dos funciones `errorL2` y `errorH1` que calcule los errores $\|u - u_h\|_{L^2}$ y $\|u - u_h\|_{H^1}$ (*Sugerencia:* Tener en cuenta que deberá conocer ∇u_h. Para una guía de esto ver el apartado).

[1] Para importar la libreria en su código solo debe incluir el comando *include("lib_fem.jl")*

Ejercicio 4 Implementar una función `orden` que dado un vector con distintos valores de h (por ej: $[2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}]$ con $h = 1/N$) calcule los errores en $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{H^1}$. En un mismo gráfico comparar $log(h)$ vs. $log(error)$ para cada tipo de error. Además, la función deberá imprimir el orden obtenido. (*Sugerencia:* Puede ser útil la función `fit` de la libreria `Polynomials`).

Aplicación: Visualización del campo eléctrico

Supongamos ahora que f representa la densidad de carga eléctrica, mientras que u es el potencial eléctrico. Nos interesa calcular tanto u como el campo eléctrico generado por la distribución de cargas f, que viene dado por $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$E = -\nabla u$$

Consideremos ahora $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y condiciones de Dirichlet homogéneas.

Ejercicio 5 Utilizar la función `fem_solve` para resolver este nuevo problema en una malla adecuada para las siguientes fuentes, y realizar los gráficos de u_h y de $-\nabla u_h$ en cada caso:

- *Carga puntual:*
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = 1/2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$
- *Espira:*
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0.124 \leq (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \leq 0.126 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sugerencia: Tener en cuenta que ahora los datos de borde son distintos. Para los gráficos, puede ser útil utilizar las funciones `plot_u` y `plot_grad`).

Cálculo de ∇u_h

Supongamos que $P \in \mathbb{R}^{N\times 2}$ es la matriz de nodos y $\in \mathbb{R}^{M\times 2}$ la matriz de triangulos. Se puede seguir el siguiente esquema para el calulo del gradiente. Para cada nodo i:

a. Hallar el primer triangulo t (fila de T) que contiene a i.

b. Llamar $a_1 = i$ y $a_2 =$, a_3 los otros nodos que participan en t.

c. Considerar $r_1 = a_2 - a_1$ y $r_2 = a_3 - a_1$, los vectores correspondientes a los lados de t adyacentes a i.

d. Observar que las derivadas direccionales satisfacen la siguiente propiedad:
$$\frac{\partial u_h}{\partial r_1} = \nabla u_h \cdot \frac{r_1}{\|r_1\|} \qquad \frac{\partial u_h}{\partial r_2} = \nabla u_h \cdot \frac{r_2}{\|r_2\|}$$
que pueden estiamarse de la siguiente forma:
$$\frac{\partial u_h}{\partial r_1} \approx \frac{u_h(a_2) - u_h(a_1)}{\|r_1\|} \qquad \frac{\partial u_h}{\partial r_2} \approx \frac{u_h(a_3) - u_h(a_1)}{\|r_2\|}.$$
Notar que los valores de $u_h(a_j)$ son conocidos.

e. Teniendo en cuenta lo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{\|r_1\|} \\ \frac{r_2}{\|r_2\|} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \frac{u_h(a_2)-u_h(a_1)}{\|r_1\|} \\ \frac{u_h(a_3)-u_h(a_1)}{\|r_2\|} \end{pmatrix}$$

Luego podemos calcular $\nabla u_h(a_1)$ resolviendo el sistema. Es decir, $\nabla u_h(a_1) = A \backslash b$.

Puede ser conveniente guardar estos vectores de cada nodo i como filas de una nueva matriz $G \in \mathbb{R}^{N\times 2}$. Así, G tiene el mismo tamaño que P, y cada fila de G contiene el gradiente de u_h en el nodo dado por la correspondiente fila de P.