1	2	3	Nota

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Análisis Numérico

Segundo Parcial – 28 de noviembre de 2023

Ejercicio 1. (35 pts) Dado el problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

con $f \in L^2(0,1)$ satisfaciendo la condición de compatibilidad $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

a) Sea $V = \{v \in H^1(0,1) : \int_0^1 v = 0\}$. Probar que V es un subespacio cerrado de $H^1(0,1)$.

b) Probar que para todo $v \in V$ existe una constante positiva C_p tal que

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq C_p \|v'\|_{L^2(0,1)}$$

c) Hallar la formulación débil en V y probar que tiene solución única.

d) Considerar la partición $\{x_0, x_1, x_2\} = \{0, 1/2, 1\}$. Para hallar la solución en $V_h = \{v \in V : v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1,\ i = 0, 1\}$ se resuelve primero el problema variacional discreto en $\tilde{V}_h = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0, v|_{[x_i,x_{i+1}]} \in P_1,\ i = 0,1\}$. Sea $\tilde{u}_h$ la solución numérica de este problema, verificar que la solución en V_h esta dada por $u_h = \tilde{u}_h - \int_0^1 \tilde{u}_h$.

e) Sea $f(x) = 2x - 1$, calcular la solución u_h siguiendo las indicaciones del item previo.

Ejercicio 2. (35 pts) Dado $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un abierto acotado convexo con frontera poligonal, $|\Gamma_1| > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^1(\partial\Omega)$. Considerar el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + b\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + a\,u = f & \Omega \\ u = 0 & \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \partial\Omega \backslash \Gamma_1. \end{cases}$$

donde $a \in C(\overline{\Omega})$, $\min_\Omega a \geq \alpha > 0$, $b \in C(\overline{\Omega})$ y $\|b\|_\infty \leq \min\{\alpha, 1/2\}$.

a) Plantear el Problema Variacional asociado en un espacio de Hilbert adecuado $V \subseteq H^1(\Omega)$ y probar que tiene una única solución.

b) Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación regular de Ω y sea

$$V_h = \{v \in V : v|_T \in P_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Plantear el Problema Variacional Discreto asociado y mostrar que existe única solución de este problema.

c) Sea u solución del (PV) y u_h la solución del (PVD). Asumiendo que $u \in H^2(\Omega) \cap V$ con $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\partial\Omega)})$, mostrar que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \qquad para\ h \to 0.$$

Con que orden lo hace?.

d) Bajo las mismas hipóteis del item previo, si $b(x,y) = z(x)$ y $\Gamma_1 = \partial\Omega$ mostrar, usando un argumento de dualidad, que existe una constante $C > 0$:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Ejercicio 3. (30 pts) Sea $\Omega = [-1,1] \times [0,1]$ y sean $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq 2$ que verifican la condición de elipticidad:

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(x)\chi_i\chi_j \geq \alpha|\chi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha > 0$$

Se busca una función $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique:

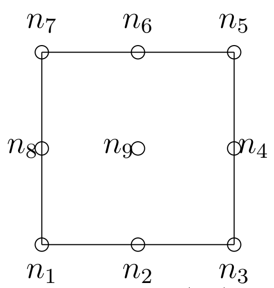
$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f & \Omega = [-1,1] \times [0,1] \\ u = 0 & \Gamma = \{(x,0) : -1 \leq x \leq 1\} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \backslash \Gamma \end{cases}$$

a) Plantear la formulación débil del problema y probar que tiene solución única.

b) Sea

$$\mathcal{Q}_2 = \left\{ v : v = \sum_{j=0}^{2} c_j p_j(x) q_j(y) : p_j, q_j \in \mathcal{P}_2 \right\}$$

Considere el rectángulo de referencia $\hat{Q} = [0,1]^2$ y los nodos de la forma que indica la figura:



i) Probar que si $\phi \in \mathcal{Q}_2$ es tal que $\phi(n_j) = 0$, $\forall 1 \leq j \leq 9$, entonces $\phi \equiv 0$ y, por ende, el conjunto de nodos es $\mathcal{Q}_2$-unisolvente.

ii) Hallar las bases asociadas a los nodos n_5 y n_8 .

c) Considere la partición $\Omega = R_1 \cup R_2$, con $R_1 = [-1,0] \times [0,1]$ y $R_2 = [0,1]^2$. Explique como procedería para obtener las bases de $V_h = \{v \in V : v|_{R_i} \in \mathcal{Q}_2\}$ a partir de las obtenidas en el rectángulo de referencia.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

(*) Para aprobar debe tener un puntaje mayor o igual a 60 pts.