CLASES PRÁCTICAS

Clase 19: Teorema Central del Límite

Ejercicio 1. La duración de una amalgama (en años) es una variable aleatoria con distribución exponencial:

- de parámetro 0.29 si la humedad ambiente al momento de realizar el arreglo es mayor al 70 %.
- de parámetro 0.14 si la humedad ambiente al momento de realizar el arreglo es de 70 % o menor.

El porcentaje diario de humedad tiene distribución $N(68, 26)$. Se eligen al azar 100 arreglos de caries del dentista de Felipe, todos ellos realizados en días distintos. Aproximar la probabilidad de que el promedio de las duraciones de estos sea menor a 6 años.

Ejercicio 2. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad

$$f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2} I_{(0,+\infty)}(x)$$

a) Calcular el límite en distribución de $\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}\right)^2$.

b) Dado $\alpha > 0$ definimos:

$$Y_n = n^\alpha \frac{(n - \lambda \sum_{i=1}^n X_i^2)}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^3}$$

i) Probar que $Y_n \xrightarrow{D} N(0, \lambda^6)$ si $\alpha = \frac{5}{2}$.

ii) Probar que $Y_n \xrightarrow{P} 0$ si $\alpha < \frac{5}{2}$.

iii) Probar que $Y_n \xrightarrow{P} \infty$ si $\alpha > \frac{5}{2}$, es decir, para todo $M > 0$ vale que $\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| \leq M) = 0$. Deducir que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no esta acotada en probabilidad.

Ejercicio 3. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas $\mathcal{E}(\lambda)$ para cierto $\lambda > 0$. Se define la variable aleatoria

$$E_n = \#\{i \in \{1, ..., n\} \mid X_i > \frac{1}{\lambda}\}$$

a) Hallar sucesiones de numeros reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ y exista el límite no trivial en distribución de $\frac{E_n - a_n}{b_n}$.

b) Hallar sucesiones de numeros reales $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} |c_n| = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$ y exista el límite no trivial en distribución de $\frac{E_n^2 - c_n}{d_n}$.

Ejercicio 4. Un grillo pasea sobre la recta numérica pegando saltos sobre los números enteros. Cada salto lo da hacia la izquierda o la derecha con igual probabilidad. Como hay viento oeste, cada salto hacia la derecha es de 2 unidades y cada salto hacia la izquierda es de 1 unidad. Supongamos que el grillo comienza parado en el 0.

a) Estimar la probabilidad de que luego de 100 saltos el grillo esté parado en $[47, 53]$.

b) Estimar la probabilidad de que luego de 100 saltos el grillo esté parado en el 50.

c) Mejorar la estimación de a).