Clases Prácticas

Clase 16: Más de convergencias y Ley de los grandes números

Ejercicio 1. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. independientes, $X_1 \equiv 0$ y para $n \geq 2$,

$$X_n = \begin{cases} -n & \text{con proba } \frac{1}{2nlog(n)} \\ n & \text{con proba } \frac{1}{2nlog(n)} \\ 0 & \text{con proba } 1 - \frac{1}{nlog(n)} \end{cases}$$

Sea $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Probar quee $Y_n \xrightarrow{P} 0$ pero que Y_n no converge c.s. a 0. (Sugerencia: Para esto último, probar que X_n no converge c.s. a 0).

Ejercicio 2. Sea U una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0,1]$ y para $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria X_n como

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } U \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Probar que $nX_n \xrightarrow{cs} 0$ pero que $(nX_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0 en L^p para ningún $p \geq 1$.

Ejercicio 3. Sean $U_i \sim \mathcal{U}[0,1]$ independientes. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que

$$\frac{f(U_1) + \cdots + f(U_n)}{n} \xrightarrow{cs} \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Ejercicio 4. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. Sea $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Calcular el límite en probabilidad de Z_n si sabemos que $\mathbb{E}(X_i) = 2, V(X_i) = 1, \mathbb{E}(X_i^4) = 32$.