

CLASES PRÁCTICAS

---

**Clase 15: Convergencias**

**Ejercicio 1.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideramos  $I_n \subseteq \mathbb{R}$  intervalos de longitud  $\frac{1}{n}$ . Sea  $U$  una variable aleatoria con distribución  $\mathcal{U}(0; 1)$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $X_n = \mathbf{1}_{\{U \in I_n\}}$ . Hallar el límite en proba y en distribución de la secuencia  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia creciente de números positivos que converge a  $p$ , con  $p < 1$ . Sea  $U$  una variable aleatoria con distribución  $\mathcal{U}(0; 1)$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $X_n = \mathbf{1}_{\{U \leq p_n\}}$ . Obtener (en caso que existan), el límite casi seguro, en proba y en distribución de la secuencia  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejercicio 3.** Se redondean 50 números al entero más cercano y luego se los suma. Si el error de redondeo de cada número es una variable aleatoria  $\mathcal{U}(-0, 5; 0, 5)$  y son todas independientes, acotar la probabilidad de que la suma resultante difiera de la suma exacta por 3 o más unidades.

**Ejercicio 4.** Sean  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de v.a. tales que  $X_n$  toma el valor 0 con proba  $\frac{1}{2n^\alpha}$  con  $\alpha > 0$  y el valor 5 con proba  $1 - \frac{1}{2n^\alpha}$ . Probar que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilidad y hallar el límite. (Probarlo ‘directamente’ y usando Tchebychev).

**Ejercicio 5.** (tarea)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de v.a. i.i.d con función de densidad dada por  $f(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}_{(0, \theta)}(x)$ . Probar que  $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  converge casi seguramente a  $\theta$ .