

CLASES PRÁCTICAS

Clase 15: Convergencias

Ejercicio 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $I_n \subseteq \mathbb{R}$ intervalos de longitud $\frac{1}{n}$. Sea U una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(0; 1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $X_n = \mathbf{1}_{\{U \in I_n\}}$. Hallar el límite en proba y en distribución de la secuencia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejercicio 2. Sea $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia creciente de números positivos que converge a p , con $p < 1$. Sea U una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(0; 1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $X_n = \mathbf{1}_{\{U \leq p_n\}}$. Obtener (en caso que existan), el límite casi seguro, en proba y en distribución de la secuencia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejercicio 3. Se redondean 50 números al entero más cercano y luego se los suma. Si el error de redondeo de cada número es una variable aleatoria $\mathcal{U}(-0, 5; 0, 5)$ y son todas independientes, acotar la probabilidad de que la suma resultante difiera de la suma exacta por 3 o más unidades.

Ejercicio 4. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. tales que X_n toma el valor 0 con proba $\frac{1}{2n^\alpha}$ con $\alpha > 0$ y el valor 5 con proba $1 - \frac{1}{2n^\alpha}$. Probar que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilidad y hallar el límite. (Probarlo ‘directamente’ y usando Tchebychev).

Ejercicio 5. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. i.i.d con función de densidad dada por $f(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}_{(0, \theta)}(x)$. Probar que $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ converge casi seguramente a θ .