Práctica 9: Teorema Central del Límite

Ejercicio 1. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión con $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n - X) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ para ciertas variables aleatorias X y Z.

a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} X$.

b) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ y varianza σ^2. Mostrar que

$$n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ \\ \infty & \text{si } \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde $n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \infty$ significa que para todo $M > 0$ se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} P(|n^\alpha(\overline{X}_n - \mu)| \leq M) = 0.$$

¿Qué sucede si $\alpha = \frac{1}{2}$?[1]

Ejercicio 2. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria no necesariamente definidas sobre un mismo espacio. Probar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$ para toda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. *Sugerencia*: Usar el Teorema de Skorohod.

Ejercicio 3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente $P\left(\prod_{i=1}^n X_i > e^{55}\right)$ con $n = 100$. *Sugerencia*: Calcule la distribución de $log(X)$.

Ejercicio 4. Rehacer el ejercicio 1 de la práctica 8 utilizando el Teorema del Límite Central: pero donde se pide acotar la probabilidad, calcularla de manera aproximada. Comparar con la cota obtenida a partir de la desigualdad de Tchebychev.

Ejercicio 5. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro λ. Hallar el límite en distribución de $\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \lambda^2)$.

Ejercicio 6. Sean X_n e Y_m dos variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros n y m, respectivamente. Probar que

$$\frac{(X_n - n) + (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \text{cuando } n, m \to +\infty.$$

[1] Observar que esto muestra que las fluctuaciones del promedio con respecto a su media son de orden $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en el casos de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita.

Ejercicio 7. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ se define la variable aleatoria[2][3]

$$F_n(t) = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,n\} : X_i \leq t\}}{n}.$$

a) Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface $F_n(t) \xrightarrow{cs} F(t)$.

b) Mostrar que $\sqrt{n}\big(F_n(t) - F(t)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}\big(0, F(t)(1-F(t))\big)$.

Ejercicio 8. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$ y $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n {X_i}^2} \qquad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n {X_i}^2}} \qquad W_n = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2,$$

hallar el límite en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 9. Se realizan n ensayos Bernoulli en forma independiente, cada uno de ellos con probabilidad de éxito 0.6.

a) Si $n = 10^4$ Estimar la probabilidad de que se produzcan entre 7901 y 8100 éxitos. Acotar el error.

b) Hallar n tal que el error cometido sea menor a 0.1.

[2] Observar que la aplicación $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de distribución acumulada aleatoria, es decir, si definimos $F_n : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F_n(\omega, t) = F_n(t)(\omega)$ entonces para cada $\omega \in \Omega$ la aplicación $F_n(\omega, \cdot)$ es una función de distribución acumulada.

[3] A las funciones de distribución acumulada F_n se las conoce como *medidas empíricas* (o *funciones de distribución muestral*) y son estimadores de la función de distribución F. Valen resultados de convergencia de F_n a F aún más fuertes de los que se muestran aquí.