1. *a*) Sean X e Y variables aleatorias independientes. Probar que si:
   i. $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{H}(m+n,n,k)$.
   ii. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{B}i\left(k, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$
   iii. Hallar $\mathbb{E}(X|X+Y=k)$ en los dos casos anteriores.

   b) Probar que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \mid X=k \sim \mathcal{B}i(k,p) \Rightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

2. Un señor se va a pescar un fin de semana. La cantidad de peces que pican en el lapso de una hora sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Además cada pez tiene probabilidad q de zafarse y $1-q=p$ de ser atrapado.
   Sean $X =$ cantidad de peces que pican, e $Y =$ cantidad de peces atrapados.

   a) Mostrar que Y tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda p)$.
   b) Mostrar que la distribución de $(X-Y)|Y=y$ es $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$. ¿Son $X-Y$ e Y independientes?
   c) Encontrar el valor esperado del número de peces atrapados.
   d) Encontrar el valor esperado del número de peces atrapados sabiendo que picaron k peces.

3. Se tienen dos urnas numeradas 0 y 1 con bolas blancas y negras. La urna 0 tiene 2 bolas blancas y 8 negras, mientras que la urna 1 tiene 7 bolas blancas y 3 negras.

   a) Elegimos una urna al azar. Luego sacamos de ella, con reposición, 5 bolas. Definimos las variables aleatorias

   $$\begin{aligned} X &= \text{ cantidad de bolas blancas obtenidas en las 5 extracciones.} \\ Y &= \text{ urna elegida.} \end{aligned}$$

   Calcular $\mathbb{E}(X|Y=0)$, $\mathbb{E}(X|Y=0)$ y $\mathbb{E}(X)$. Compararlas entre sí.

   b) Ahora cambiamos el procedimiento. Elegimos una urna al azar, y de ella extraemos 1 bola, que luego reponemos en la urna correspondiente. Luego repetimos el experimento 5 veces, de manera independiente. Sea $Z =$ cantidad de bolas blancas obtenidas en las 5 extracciones. Hallar $\mathbb{E}(Z)$ y compararla con la $\mathbb{E}(X)$ hallada en el ítem anterior.

4. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Probar que

   $$\operatorname{cov}\big(X - \mathbb{E}(X|Y), \mathbb{E}(X|Y)\big) = 0.$$

   Interpretar geométricamente.

5. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se define la varianza condicional de X dada Y como la variable aleatoria

   $$\operatorname{Var}(X|Y) := \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X|Y)\big)^2 \Big| Y\Big).$$

   Probar que

   $$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}[\mathbb{E}(X|Y)] + \mathbb{E}\big(\operatorname{Var}(X|Y)\big).$$

6. Sean X e Y variables aleatorias tales que para cada $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $P(Y \leq y|X)$ es una constante $F(y)$ que no depende de X. Probar que $F_Y(y) = F(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y que X e Y son independientes.

7. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con esperanza y varianza finitas y N una variable aleatoria a valores en $\mathbb{N}$ con esperanza y varianza finitas e independiente de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Probar que $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

b) Probar que

$$\operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}(N)\operatorname{Var}(X_1) + \mathbb{E}^2(X_1)\operatorname{Var}(N).$$

c) El número de reclamos recibido por una compañía de seguros en una semana es una variable aleatoria Poisson de parámetro λ. El monto pagado por cada uno de esos reclamos es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Hallar la esperanza y la varianza del total pagado por la compañía en concepto de reclamos en una semana. ¿Qué hipótesis se están haciendo? ¿Son razonables?

8. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias discretas independientes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Observar que S_n es una variable discreta para todo $n \in \mathbb{N}$.

   a) Dados números naturales $k < n < m$, mostrar que S_k y S_m son condicionalmente independientes dado S_n, i.e., para todo $x_k \in \mathcal{R}_{S_k}$ y $x_m \in \mathcal{R}_{S_m}$ se verifica

   $$P(S_k = x_k, S_m = x_m|S_n) = P(S_k = x_k|S_n)P(S_m = x_m|S_n).$$

   Sugerencia: Mostrar que $P(S_k = x_k, S_m = x_m|S_n = x_n) = P(S_k = x_k|S_n = x_n)P(S_m = x_m|S_n = x_n)$ para todo $x_n \in \mathcal{R}_{S_n}$.

   b) Mostrar que si $\mathbb{E}(X_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces dados $n < m$ se verifica $\mathbb{E}(S_m|S_n) = S_n$.

9. La llegada de un tren a la estación se produce con distribución uniforme entre las 10 am y las 10:20 am. La partida del mismo se produce con distribución uniforme entre su llegada y las 11 am. Sean X la hora de llegada de dicho tren e Y la hora de su partida.

   a) Calcular $\mathbb{E}(Y)$ y $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

   b) Hallar la función de densidad de Y.

   c) Calcular la probabilidad de que el tren haya llegado a la estación entre las 10:10 am y las 10:15 am sabiendo que partió después de las 10:25 am.

10. *a*) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ y sea $Z = X + Y$. Probar que $X|Z \sim \mathcal{U}[0, Z]$, es decir, que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

   $$P(X \leq x|Z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{Z} & \text{si } 0 \leq x \leq Z \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

   b) Dado $\lambda > 0$, sean Z una variable aleatoria con distribución $\Gamma(2, \lambda)$ y X otra variable aleatoria tal que su distribución condicional dada Z es $\mathcal{U}[0, Z]$. Mostrar que X y $Z - X$ son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro λ. ¿Cuál es la relación con el item anterior?

   c) Sea Z una variable aleatoria con distribución $\Gamma(2, 1)$ y X otra variable aleatoria tal que su distribución condicional dada Z es $\mathcal{U}[0, Z]$. Calcular $P(Z \geq 2|X \leq 1)$.

11. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{N}(0, 1)$. Probar que su cociente $\frac{X}{Y}$ tiene distribución de Cauchy sin apelar al teorema de cambio de variables.

12. Dados $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$ sea (X, Y) un vector aleatorio absolutamente continuo con densidad conjunta

    $$f_{XY}(x, y) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha} y^{\alpha-1} e^{-\lambda(x+\frac{y}{x})} \mathbb{1}_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)}(x, y).$$

a) Hallar la distribución de X y la distribución condicional de Y dada X. ¿Son éstas distribuciones conocidas? ¿Cuáles?

b) Calcular $\mathbb{E}(Y|X)$ y $\mathrm{Var}(Y|X)$. Deducir los valores de $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$ y $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

c) Probar que el cociente $\frac{Y}{X}$ tiene distribución $\Gamma(\alpha,\lambda)$ y es independiente de X sin apelar al teorema teorema de cambio de variables.

13. Un vector aleatorio (X,Y) tiene distribución normal bivariada si tiene función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}.$$

a) Mostrar que la distribución condicional de X dada Y es $\mathrm{N}\Big(\mu_X+\rho\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-\mu_Y),\sigma_X^2(1-\rho^2)\Big)$.

b) Calcular $\mathbb{E}(X|Y)$ y $\mathrm{Var}(X|Y)$.

14. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional tal que $f_{X|Y=y}(x)=\frac{3x^2}{y^3}\mathbb{1}_{(0,y)}(x)$ y $f_Y(y)=5y^4\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$.

a) Calcular la función de densidad del cociente $\frac{X}{Y}$ y probar que es independiente de Y sin apelar al teorema de cambio de variables.

b) Hallar la densidad condicional $f_{Y|X=x}$ para cada $x\in(0,1)$.

15. Dados $a,b>0$ sean X e Y variables aleatorias a valores en $\mathbb{N}_0$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}$ respectivamente, tales que su distribución conjunta viene dada por la fórmula

$$P(X=n,Y\leq t)=b\int_0^t\frac{(ay)^n}{n!}e^{-(a+b)y}\,dy.$$

a) Hallar la distribución condicional de Y dada X y calcular $\mathbb{E}\big(\frac{Y}{X+1}\big)$.

b) Hallar la distribución condicional de X dada Y y calcular $\mathbb{E}(X|Y)$.

Aclaración. Dado $t>0$, para toda sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas y no negativas definidas sobre el intervalo $[0,t]$ vale que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^t f_n=\int_0^t\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n$.

16. Dados $p,q>0$ sea (X,Y) un vector aleatorio tal que $Y\sim\beta(p,q)$ y $X|Y=y\sim Bi(n,y)$ para $y\in(0,1)$. Probar que la distribución condicional de Y dada X es $\beta(p+X,q+n-X)$.

17. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua.

a) Utilizando argumentos intuitivos, ver que

$$\mathbb{E}\left(g(X)|X^2=t\right)=\frac{g\left(\sqrt{t}\right)f_X\left(\sqrt{t}\right)+g\left(-\sqrt{t}\right)f_X\left(-\sqrt{t}\right)}{f_X\left(\sqrt{t}\right)+f_X\left(-\sqrt{t}\right)}$$

b) Utilizando la definición de esperanza condicional, probar que

$$\mathbb{E}\left(g\left(X\right)|X^2\right)=\frac{g\left(\sqrt{X^2}\right)f_X\left(\sqrt{X^2}\right)+g\left(-\sqrt{X^2}\right)f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}{f_X\left(\sqrt{X^2}\right)+f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}$$

c) Observar que $\mathbb{E}\left(X^2|X\right)=X^2$ mientras que $\mathbb{E}\left(X|X^2\right)\neq X$.¿Es razonable esto?

18. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y\sim\mathcal{U}[2,3]$ y para cada $y\in[2,3]$ se verifica

x	-1	0	1
$p_{X\|Y=y}(x)$	$\dfrac{3-y}{2}$	$y-2$	$\dfrac{3-y}{2}$

a) Hallar p_X.

b) Calcular la función de distribución $F_{Y|X=x}(y)$ para cada $x \in \mathcal{R}_X$.

19. Sean X e Y variables aleatorias tales que X es discreta con probabilidad puntual

x	1	2
$p_X(x)$	1/4	3/4

y la distribución condicional de Y dada X es $\varepsilon(X)$.

a) Calcular $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$.

b) Calcular $P(X = x, Y \leq y)$ para $y > 0$ y $x \in \mathcal{R}_X$.

c) Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ sea $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación medible Borel tal que $P(X = x|Y) = g_x(Y)$. Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ expresar $P(X = x, Y \leq y)$ en términos de g_x .

d) Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ calcular explícitamente $P(X = x|Y)$.