1. Se dispone de dos urnas cuyo contenido es el siguiente:

   Urna A: 5 bolillas rojas y 3 blancas
   Urna B: 1 bolilla roja y 2 blancas

   Se arroja un dado y, si el resultado es 3 ó 6, se extrae una bolilla de la urna A y se coloca en la urna B para luego extraer una bolilla de esta última. En caso contrario, el procedimiento se realiza a la inversa.

   a) Calcular la probabilidad de que ambas bolillas extraídas sean rojas.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolillas sean blancas si ambas bolillas son del mismo color? ¿Es más probable que sean rojas?

2. Se tienen tres urnas numeradas con veinte bolillas de color en cada una. La primer urna contiene veinte bolillas blancas, la segunda quince y la última diez, siendo todas las bolillas restantes negras. Se elige una de las urnas al azar y se extraen de ella con reposición dos bolillas. La probabilidad de elegir la primer urna es la misma que la de elegir la segunda, mientras que la de elegir la última es igual a su suma. Calcular la probabilidad de haber seleccionado la primer urna sabiendo que las dos bolillas extraídas son blancas.

3. Cuando se realiza un análisis de laboratorio para diagnosticar una cierta enfermedad en un paciente se pueden cometer dos tipos de errores de diagnóstico: si el análisis da positivo pero el paciente está sano se dice que tenemos un falso positivo, mientras que si el análisis da negativo pero el paciente está enfermo se dice que tenemos un falso negativo. Consideremos los eventos $E = \{\text{La persona examinada está enferma}\}$ y $A = \{\text{El resultado del análisis es positivo}\}$. La cantidad $P(A|E)$ se conoce como sensibilidad del test mientras que $P(A^c|E^c)$ se denomina la especificidad del test.

   a) Supongamos que una cierta prueba de laboratorio es tal que $P(A|E) = P(A^c|E^c) = 0{,}95$ y además que la probabilidad de que un paciente que se examina padezca la enfermedad es 0,005. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cuyo análisis diagnóstico es positivo esté realmente enferma?

   b) Supongamos que $P(A|E) = P(A^c|E^c) = p$ y $P(E) = 0{,}005$. ¿Para qué valor de p es $P(E|A) = 0{,}95$?

4. **Esquema de Polya**. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y R rojas se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, devolviendo en cada instancia la bolilla extraída al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color.

   a) Hallar la probabilidad de que:

   i. se obtenga una roja en la segunda extracción.

   ii. se obtenga una roja en la n-ésima extracción.

   b) Probar que para todo $m < n$ la probabilidad de que se obtenga una bolilla roja en la m-extracción y una roja en la n-ésima extracción es

   $$\frac{R\,(R+c)}{(R+B)\,(R+B+c)}$$

   y una bolilla roja en la m-extracción y una blanca en la n-ésima extracción es

   $$\frac{RB}{(R+B)\,(R+B+c)}.$$

   Generalizar a más de dos extracciones.

   Sugerencia: En el 4*a* se probó el caso $m = 1$ y n arbitrario. Hacer inducción en m.

c) Hallar la probabilidad de que:

   i. se obtenga una bolilla roja en la tercera extracción dado que en la segunda se obtuvo una roja.

   ii. se haya obtenido una roja en la primera extracción dado que en la n-ésima se extrajo una roja.

5. Se tienen $n+1$ urnas numeradas desde la 0 hasta la n. La urna i contiene i bolillas blancas y $n-i$ negras. Se elige al azar una urna

   a) y se extrae de ella una bolilla al azar.

      i. Hallar la probabilidad de que la bolilla extraída sea blanca.

      ii. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla extraída provenga de la urna i si ésta es blanca?

   b) y se realizan k extracciones con reposición de la urna elegida.

      i. Hallar la probabilidad de que las k bolillas extraídas sean blancas.

      ii. Si las k bolillas extraídas son blancas, ¿cuál es la probabilidad de que al realizar una nueva extracción de la misma de urna esta última bolilla sea blanca?

6. Se extrae al azar una bolilla de una urna que contiene 9 bolillas, de las cuales 3 son blancas, 3 son negras y 3 son rojas. Además, las bolillas de cada color tienen la numeración $1, 2$, y 3. Por último, la primer bolilla blanca, la segunda negra y la tercera roja son rayadas. Consideremos los eventos:
   $A = \{\text{La bolilla es número 1}\}$
   $B = \{\text{La bolilla es blanca}\}$
   $C = \{\text{La bolilla es rayada}\}$.

   a) ¿Son los eventos A, B y C independientes de a pares?

   b) ¿Son independientes los eventos A, B y C?

7. Tres jugadores a, b y c se disponen a jugar un campeonato de metegol bajo las siguientes reglas: la modalidad de juego es por turnos bajo la consigna de que el ganador de un partido jugará el siguiente con el jugador que estaba afuera y aquel que logre dos victorias consecutivas será declarado campeón del torneo. En cada partido ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar. Comienzan el campeonato jugando a y b.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el torneo continue indefinidamente? Es decir, hallar la probabilidad de que no haya dos victorias consecutivas de un mismo jugador.

   b) Calcular la probabilidad de ganar el campeonato para cada uno de los tres jugadores a, b y c. ¿Conviene jugar el primer partido?

8. a) Probar que el evento A es independiente de cualquier evento B si y sólo si $P(A) = 1$ ó 0.

   b) Si $A \subset B$ y A y B son independientes entonces $P(A) = 0$ ó $P(B) = 1$.

   c) Probar que si $A_1, \ldots, A_n$ son independientes y para cada $i = 1, \ldots, n$ vale que $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^c$ entonces los eventos $B_1, \ldots, B_n$ resultan independientes.
   Sugerencia: Hacer inducción en la cantidad de complementos involucrados.

9. a) De un bolillero que contiene n bolillas numeradas de la 1 hasta la n se extrae una al azar. Para cada p número primo sea el evento $A_p = \{\text{El número de la bolilla elegida es divisible por } p\}$. Probar que si $p_1, \ldots, p_k$ son k divisores distintos de n entonces los eventos $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$ son independientes.

   b) Sea $\varphi(n)$ la función de Euler de la teoría de números, es decir $\varphi(n)$ denota la cantidad de enteros positivos coprimos con n y menores o iguales que éste. Demostrar la igualdad

$$\varphi(n) = n \prod_{p \text{ primo: } p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$