Práctica 12: Estadística

Ejercicio 1. Sea $X_1, X_2, .., X_n$ un muestra i.i.d. donde X_i tiene densidad $f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$, donde $\theta \in \mathbb{R}$ es desconocido.

a) Encontrar el estimador de momentos de θ. ¿Es insesgado? ¿Es consistente?.

b) Se realiza un estudio en el que se recogen n = 50 valores x_i, obteniéndose que $\sum_{i=1}^{50} x_i = 146.28$. Dar una estimación puntual de θ basado en el estimador de momentos para esta muestra.

Ejercicio 2. El tiempo T (en segundos) que un ordenador tarda en ejecutar una tarea sigue una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(t;\theta) = \frac{\theta}{t^{\theta+1}}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(t), \qquad \theta > 1.$$

a) Utilizando el método de los momentos, proponer un estimador $\hat{\theta}$ para el parámetro θ. ¿Es consistente?

b) Se ejecuta 5 veces la tarea, y se cronometra el tiempo que ha tardado cada vez. Estos tiempos son (en segundos): 6, 5, 3, 7, 2. Basándonos en esta muestra, y el estimador $\hat{\theta}$, estima la probabilidad de que se tarde más de 5 segundos en realizar la tarea.

c) Hallar el EMV de θ.

Ejercicio 3. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\Gamma(\alpha,\lambda)$. Hallar un estimador para α usando el método de los momentos.

Ejercicio 4. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria, con densidad:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^2}\mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(x), \qquad \theta > 0.$$

a) Hallar $\hat{\theta}_n$ el EMV de θ.

b) Probar que la función de distribución acumulada de $T = \frac{\hat{\theta}_n}{\theta}$ es $F_T(t) = \mathbf{1}_{\{t\geq 1\}}(1 - \frac{1}{t^n})$.

c) Hallar un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para θ.

d) Hallar la esperanza de la longitud del intervalo hallado en c).

e) Calcular un intervalo de confianza de nivel 0.90 basado en la siguiente muestra:

8 10 7,5 6 9,5 11 7 9 10 6.

Ejercicio 5. Sea Sea $X_1, X_2, .., X_n$ un muestra i.i.d. con con esperanza μ y varianza σ^2 finita. Probar que el estimador

$$S^2 := \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}$$

(llamado “varianza muestral”) es un estimador insesgado de la varianza σ^2.

Ejercicio 6. Se intenta medir el período de un determinado péndulo con un cronómetro de precisión conocida. Las mediciones registradas son de la forma $X_i = \mu + \epsilon_i$, donde μ es el período real del péndulo y los términos ϵ_i son variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(0,\ 0,25)$. Las mediciones obtenidas fueron:

5,1 5,2 5,6 5,1 5,5 5,8 5,9 4,9 5,2 5,6

a) ¿Qué distribución tienen las X_i? ¿Son independientes? (Aclaración: la “precisión” se refiere a la varianza.)

b) Encontrar un intervalo de confianza del 95% para μ. ¿Es único?

c) Hallar el mínimo número de observaciones que son necesarias para lograr que el intervalo tenga longitud menor a 0,04.

d) Ahora intentamos medir el período con un segundo cronómetro de precisión desconocida. Se realizan 10 mediciones obteniendo el mismo promedio que con el primer cronómetro y estimación de la varianza $s^2 = 0,25$. Encontrar un intervalo de confianza del 95% para μ con las mediciones realizadas por este segundo cronómetro. ¿Es el mismo que en (b)?

e) ¿Qué sucede en cada caso si se realizaran 100 mediciones en lugar de 10? ¿Y si se toman 10 mediciones pero se pide un intervalo de confianza del 90