1. Una máquina produce artículos de 3 clases: A, B y C en proporciones 25 %, 25 % y 50 % respectivamente. Las longitudes de los artículos A y B siguen distribuciones $\mathcal{U}[0,1]$ y $\mathcal{U}[0,2]$ respectivamente y las longitudes de los artículos C se distribuyen según la densidad $f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$. Se eligen n artículos al azar de la producción total y se calcula el promedio de sus longitudes.

   a) Dar una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ si el tamaño de la muestra es $n = 100$.

   b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ sea mayor o igual que 0.90?

2. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye la legalización del consumo de marihuana (p es desconocida). Se toma una muestra de 50 personas elegidas al azar, se les pregunta si apoyan o no la legalización y se estima p a partir de la frecuencia relativa Y_{50} que se define por

$$Y_{50} = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de personas encuestadas que están a favor de la legalización}}{50}$$

   Observar que Y_{50} es una variable aleatoria y p es simplemente un número. Cuanto más cerca se encuentre Y_{50} de p, mejor estimador será.

   a) Hallar una cota superior para $P(|Y_{50} - p| > 0{,}1)$ que no dependa de p.

   b) Hallar n para que $P(|Y_n - p| > 0{,}1) \leq 0{,}01$.

3. **Desigualdad de Tchebychev a un lado**

   a) Sea X una variable aleatoria con $\mathbb{E}(X) = 0$ y $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$. Probar que para todo $a > 0$ vale

$$P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

   Sugerencia: Observar que para todo $b > 0$ vale la desigualdad

$$P(X > a) = P(X + b > a + b) \leq P((X + b)^2 > (a + b)^2). \tag{1}$$

   Aplicar la desigualdad de Markov en (1) y calcular el mínimo en b de la cota hallada.

   b) Un conjunto de 200 personas (integrado por 100 mujeres y 100 hombres) se divide aleatoriamente en 100 pares de 2 personas cada uno. Utilizar la desigualdad de Tchebychev a una lado para hallar una cota superior para la probabilidad de que menos de 30 de estos pares estén formados por una mujer y un hombre. Comparar con la cota obtenida a partir de la desigualdad de Tchebychev original.

4. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que $X_1 \equiv 0$ y para $n \geq 2$

$$P(X_n = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^3} & \text{si} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \\ 1 - \dfrac{2}{n^2} & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}$$

   Probar que si $\alpha > \frac{1}{2}$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n^\alpha} \xrightarrow{P} 0.$$

   Sugerencia: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Var}(X_n) = 0$.

   a) Probar que si $\mathbb{E}(X_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{P} 0$.

   b) Probar que si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu \in \mathbb{R}$ entonces $X_n \xrightarrow{P} \mu$.

6. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria, todas ellas definidas sobre el mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   a) Escribir el conjunto $\{X_n \to X\}$ en términos de eventos de la forma $\{|X_n - X| \leq \alpha\}$ con $\alpha > 0$ y verificar que es un evento perteneciente a la σ-álgebra $\mathcal{F}$.

   b) Escribir el conjunto $\{X_n \nrightarrow X\}$ en términos de numerables eventos de la forma $\{|X_n - X| > \alpha\}$ con $\alpha > 0$.

   c) Verificar que $\{X_n \to X\} = \{X_n - X \to 0\}$.

   d) Sea $L^+ = \limsup_{n\to+\infty} X_n$, i.e., para cada $\omega \in \Omega$ se define $L^+(\omega) = \limsup_{n\to+\infty} X_n(\omega)$.

      i. Para cada $\alpha > 0$ escribir el conjunto $\{L^+ \geq \alpha\}$ en términos de numerables eventos de la forma $\{X_n > r \text{ para infinitos valores de } n\}$ con $r \in \mathbb{R}$ y verificar que es un evento perteneciente a la σ-álgebra $\mathcal{F}$. Deducir que L^+ es una variable aleatoria.

      ii. Para cada $\alpha > 0$ escribir el conjunto $\{L^+ > \alpha\}$ en términos de numerables eventos de la forma $\{X_n > r \text{ para infinitos valores de } n\}$ con $r \in \mathbb{R}$.

   e) Demostrar afirmaciones análogas a las del ítem *d*) para $L^- = \liminf_{n\to+\infty} X_n$.

7. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\varepsilon(1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria
$$Y_n = \frac{X_n}{\log(n+1)}.$$

   a) Probar que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

   b) Probar que $P(L^+ = 1) = 1$, donde $L^+ := \limsup_{n\to+\infty} Y_n$.

   c) Probar que $P(L^- = 0) = 1$, donde $L^- := \liminf_{n\to+\infty} Y_n$.

   d) Deducir de los items anteriores que la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite casi seguro.

8. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{N}(0,1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria
$$Y_n = \frac{X_n}{\sqrt{\log n}}.$$

   a) Probar que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

   b) Probar que $P(L^+ = \sqrt{2}) = 1$, donde $L^+ := \limsup_{n\to+\infty} Y_n$.
   Sugerencia: Probar primero que si $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, valen las siguientes desigualdades.

      1) Para todo $x > 0$, $P(X > x) \leq \frac{f_X(x)}{x}$.
      Sugerencia: Observar que $x \int_x^{+\infty} f_X(t)dt \leq \int_x^{+\infty} t f_X(t)dt$ para todo $x > 0$, y que $(f_X(t))' = -t f_X(t)$, y a partir de ahí deducir que $x\,(1 - F_X(x)) \leq f_X(x)$.

2) Para todo $x > 1$, $\frac{f_X(x)}{2x} \leq P(X > x)$[1].
Sugerencia: Observar que $\left(\frac{f_X(t)}{t}\right)' = -f_X(t)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$, recordar que $\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \leq 2$ para todo $t > 1$, y usarlo para acotar $\int\limits_x^{+\infty} f_X(t)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$, como en *i)*.

c) Deducir que $P(L^- = -\sqrt{2}) = 1$, donde $L^- := \liminf_{n\to+\infty} Y_n$.

d) Concluir a partir de los items anteriores que la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite casi seguro.

e) Probar que $P\big(|\sum_{k=1}^n X_k| < 2\sqrt{n\log n}$ para todo n suficientemente grande$\big) = 1$. Deducir a partir de este resultado la ley fuerte de los grandes números para variables aleatorias con distribución normal.

9. Se elige al azar un número X en el intervalo $[0, 1]$.[2]

   a) Dados $k \in \mathbb{N}$ y una secuencia ordenada de k dígitos $(a_1, \ldots, a_k) \in \{0, \ldots, 9\}^k$, calcular la probabilidad para cada $n \in \mathbb{N}$ de que dicha secuencia coincida con la de los dígitos del desarrollo decimal de X entre los lugares n y $n + k - 1$.

   b) Dados $k \in \mathbb{N}$ y una secuencia ordenada de k dígitos $(a_1, \ldots, a_k) \in \{0, \ldots, 9\}^k$, calcular la probabilidad de que dicha secuencia aparezca infinitas veces en el desarrollo decimal de X.

   c) Calcular $P($Ocurren infinitos $A_n)$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el evento A_n como

   $A_n = \{$El 9 aparece al menos n veces consecutivas en los $2n$ primeros lugares del desarrollo decimal de

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que X sea racional?

10. Se tira infinitas veces una moneda de manera independiente y con probabilidad p de obtener cara en cada lanzamiento.

    a) Dado $k \in \mathbb{N}$ calcular la probabilidad de obtener infinitas rachas de k caras consecutivas.

    b) Sea A_n el evento de obtener una racha de caras consecutivas de longitud no menor que n entre los lanzamientos 2^n y $2^{n+1} - 1$. Probar que

    $$P(\text{Ocurren infinitos } A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

    Sugerencia: Si $p \geq \frac{1}{2}$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - (1 - p^n)^{\left[\frac{2^n}{n}\right]}\right) = +\infty$.

11. Una colección $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de variables aleatorias se dice *acotada en probabilidad* o *tight* si dado $\varepsilon > 0$ existe un compacto K_ε tal que

    $$\sup_{i\in\mathcal{I}} P(X_i \notin K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

    a) Probar que toda colección finita de variables aleatorias es acotada en probabilidad.

    b) Mostrar que una familia infinita de variables aleatorias no es necesariamente acotada en probabilidad.

    c) Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X_0 una variable aleatoria tal que $X_n \xrightarrow{P} X_0$. Probar que la familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ está acotada en probabilidad.

[1] En realidad, vale la siguiente cota inferior, para todo $x > 0$, $\frac{f_X(x)}{x+\frac{1}{x}} \leq P(X > x)$, que es algo más difícil de probar.

[2] Si un número admite dos desarrollos decimales se optará por el finito. Por ejemplo, se tomará 0.745 y no $0.744\hat{9}$.

12. Probar que una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilidad a una variable aleatoria X si y sólo si toda subsucesión de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene otra subsucesión que converge casi seguramente a X[3].

13. Sean $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{X}_0$ otro vector aleatorio sobre $\mathbb{R}^n$.

    a) Probar que si $\mathbf{X}_k \xrightarrow{cs} \mathbf{X}_0$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua entonces $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{cs} g(\mathbf{X}_0)$.

    b) Probar que si $\mathbf{X}_k \xrightarrow{P} \mathbf{X}_0$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua entonces $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{P} g(\mathbf{X}_0)$. *Sugerencia:* Hay dos posibilidades. La más fácil, tomar subsucesión de la subsucesión. La otra, tener presente que $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión acotada en probabilidad y que toda función continua es uniformemente continua sobre compactos.

14. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de variables aleatorias.

    a) Probar que si $X_n \xrightarrow{P} 0$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en probabilidad entonces $X_nY_n \xrightarrow{P} 0$.

    b) Probar que si $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y$ entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$ y que $X_nY_n \xrightarrow{P} XY$.

    c) Probar que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada entonces para todo $p \geq 1$ vale $X_n \xrightarrow{P} 0 \iff X_n \xrightarrow{L^p} 0$.

    d) Mostrar con un ejemplo que la equivalencia del ítem anterior puede no valer si la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada. ¿Es alguna de las implicaciones cierta siempre? ¿Cuál?

    e) Probar que si $\mathbf{X}_k \xrightarrow{P} \mathbf{X}_0$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada entonces $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{L^p} g(\mathbf{X}_0)$ para todo $p \geq 1$.

15. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias.

    a) Sea X una variable aleatoria con $P(X = 0) = 0$. Definimos a Z por

    $$Z = \begin{cases} \dfrac{1}{X} & \text{si } X \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{si } X = 0. \end{cases}$$

    Probar que Z es una variable aleatoria. La notaremos por $\dfrac{1}{X}$.

    b) Supongamos que $X_n \xrightarrow{cs} X$ con $P(X = 0) = 0$. Probar que $\dfrac{1}{X_n} \xrightarrow{cs} \dfrac{1}{X}$, donde $\dfrac{1}{X_n}$ se define como en el ítem anterior.

    c) Supongamos que $X_n \xrightarrow{P} X$ con $P(X = 0) = 0$. Probar que $\dfrac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \dfrac{1}{X}$.
    Sugerencia: Tomar subsucesión de la subsucesión.

16. Sean f y g funciones continuas definidas sobre el intervalo $[0, 1]$ tales que $0 < f(x) \leq kg(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, donde k es una cierta constante positiva.

    a) Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un punto elegido al azar en el cubo $[0, 1]^n$. Definimos las sucesiones de variables aleatorias $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por las fórmulas

    $$Y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(X_i)}{n} \quad \text{y} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(X_i)}{n}.$$

[3] En particular, toda sucesión de variables aleatorias que converge en probabilidad tiene una subsucesión que converge casi seguramente.

Probar que

$$Y_n \xrightarrow{P} \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{y} \quad Z_n \xrightarrow{P} \int_0^1 g(x)\,dx.$$

b) Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{g(x_1)+\cdots+g(x_n)}\,dx_1\cdots dx_n = \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{\int_0^1 g(x)\,dx}$$

17. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0,1]$. Hallar el límite casi seguro de la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n\in\mathbb{N}$ la variable aleatoria Y_n se define como

$$Y_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i}.$$

18. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X)=1$, $\mathbb{E}(X^2)=2$ y $\mathbb{E}(X^4)<+\infty$. Probar que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{cs} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

19. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{N}(0,1)$. Dados $a,b\in\mathbb{R}$ definimos para cada $n\in\mathbb{N}$ la variable aleatoria

$$Z_n = e^{aS_n - bn}$$

donde $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$. Probar que $Z_n \xrightarrow{cs} 0 \iff b>0$ pero que para $r\geq 1$ se tiene $Z_n \xrightarrow{L^r} 0 \iff r<\frac{2b}{a^2}$.

20. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con $\mathbb{E}(|X_1|)=+\infty$.

   a) Probar que para todo $k\in\mathbb{N}$ se verifica $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n|>kn)=+\infty$.

   b) Probar que $\limsup_{n\to+\infty}\frac{|X_n|}{n}=+\infty$ cs.

   c) Deducir que $\limsup_{n\to+\infty}\frac{|S_n|}{n}=+\infty$ cs., donde $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.

   d) Concluir del ítem anterior que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{cs} \mu$ para cierto $\mu\in\mathbb{R}$ entonces $\mathbb{E}(|X_1|)<+\infty$.