PRÁCTICA 10: FUNCIONES CARACTERÍSTICAS (Y MÁS DE CONVERGENCIA EN DISTRIBUCIÓN)

Ejercicio 1. Hallar la función característica de la distribuciones $\varepsilon(\lambda)$ y calcular a partir de su función característica la esperanza y la varianza.

Ejercicio 2. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Compruebe utilizando funciones características que

a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1), Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \Longrightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

b) $X \sim \mathcal{B}i(n, p), Y \sim \mathcal{B}i(m, p) \Longrightarrow X + Y \sim \mathcal{B}i(n + m, p)$

Ejercicio 3.

a) Sea $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sqrt{n}\big(\overline{Z}_n - \mu\big) \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

b) Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 finitas tal que para algún $n_0 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ se verifica que $\sqrt{n_0}\big(\overline{X}_{n_0} - \mu\big) \sim X_1 - \mu$. Probar que $X_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.[1] [2]

Ejercicio 4. Probar que no existen variables aleatorias X y Z independientes e idénticamente distribuidas tales que

$$X - Z \sim \mathcal{U}[-1, 1].$$

Ejercicio 5. Probar mediante el estudio de funciones características la ley débil de los grandes números para variables aleatorias i.i.d. con esperanza finita sin asumir la finitud del segundo momento.

Ejercicio 6. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución dada por $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[-1, 1]$.
Sugerencia: Utilizar la identidad $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$.

Ejercicio 7. Sea $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios tal que X_n e Y_n son independientes para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$. Probar que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X' + Y'$, donde X' e Y' son independientes y tales que $X' \sim X$ e $Y' \sim Y$.

[1] Observar que este resultado dice que la distribución normal es la única con segundo momento finito que resulta invariante por la estandarización correspondiente al Teorema del Límite Central. ¿Es razonable esto?

[2] Otra cosa que podemos apreciar de este resultado es que si bien para cualquier sucesión de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. con varianza finita se tiene que $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, la igualdad en distribución con el límite **no** vale para ningún n fijo a menos que las X_n sean normalmente distribuidas.