1. El diámetro D expresado en decímetros del tronco de una cierta especie de árboles es una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad

$$f_D(x) = k\,x\,\mathbb{1}_{(0,10)}(x)$$

   a) Hallar el valor de la constante k.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 decímetros?

   c) ¿Cómo se modifica la probabilidad anterior si se sabe que el diámetro mide más de 5 decímetros?

   d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan diámetro entre 4 y 6 decímetros.

   e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 decímetros sea no menor a 0,99?

2. El colectivo que toma Felipe para ir al trabajo llega a la parada en algún momento entre las 10 y las 10:30 de la mañana con distribución uniforme. Felipe llega a la parada a las 10 de la mañana.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 10 minutos?

   b) Si el colectivo no ha llegado todavía a las 10:15, hallar la probabilidad de que Felipe tenga que esperar por lo menos otros 10 minutos más.

3. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada F. Mostrar que $F(X)$ tiene distribución $\mathcal{U}[0,1]$.

4. Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución simétrica respecto de $\theta \in \mathbb{R}$ si $X - \theta \sim \theta - X$.

   a) Dar dos ejemplos de variables aleatorias con distribución simétrica, una discreta y otra continua.

   b) Sea X una variable aleatoria absolutamente continua. Probar que X tiene distribución simétrica respecto de θ si y sólo si f_X es simétrica respecto de θ, i.e. $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. Una fábrica produce pilas cuya duración en horas, cuando se las destina para un determinado uso, tiene distribución normal de parámetros $\mu_0 = 53$ y $\sigma_0^2 = 25$. No obstante, un desperfecto en un sector de la fábrica produjo un cambio en la calidad de las pilas: del total que se fabrica una proporción 0,7 de ellas tiene la duración correcta mientras que las restantes están falladas y tienen una duración en horas con distribución normal de parámetros desconocidos μ_1 y σ_1^2. Desafortunadamente, no hay forma de distinguir entre una pila común y una fallada a simple vista. Sea D la duración en horas de una pila extraída al azar del lote de producción de la fábrica.

   a) Calcular μ_1 y σ_1^2 sabiendo que $P(D \geq 47) = 0{,}82688$ y $P(D \geq 60) = 0{,}05746$.

   b) Calcular la función de densidad de la duración en horas de una pila extraída al azar del lote de producción de la fábrica.

   c) Si se extrae una pilar al azar del lote de producción y se observa que dura más de 51 horas en funcionamiento, ¿cuál es la probabilidad de que sea una pila fallada?

6. **Definición**. Una variable aleatoria continua X tiene la *propiedad de falta de memoria* si para todo par de números reales s y t se verifica

$$P(X \geq s+t \mid X > t) = P(X \geq s).$$

Probar que una variable aleatoria X continua posee la propiedad de falta de memoria si y sólo si tiene distribución exponencial[1] de parámetro $\lambda = -\log\big(P(X > 1)\big)$.

7. Sean $\lambda > 0$ y X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$. Probar que $Y = [X] + 1$ tiene distribución geométrica de parámetro $p = 1 - e^{-\lambda}$, donde $[x]$ denota la parte entera de x.

8. Definimos la función Gamma $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ por la fórmula

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

   a) Probar que Γ está bien definida[2].
   b) Mostrar que $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ para todo $\alpha > 1$. Deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   c) Probar que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
   Sugerencia: Hallar la función de densidad de Z^2 para Z una variable aleatoria con distribución normal estándar. ¿Es la densidad obtenida la de una distribución conocida?¿Cuál?

9. Sean $n \in \mathbb{N}$ y Z una variable aleatoria con distribución $\Gamma(n, \lambda)$. Probar que para todo $z > 0$ se tiene

$$F_Z(z) = P(X_z \geq n)$$

donde X_z es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{P}(z\lambda)$. Concluir que el instante de tiempo en que sucede la n-ésima ocurrencia de un proceso de Poisson con intensidad λ tiene distribución $\Gamma(n, \lambda)$.

10. Sea U una variable con distribución $\mathcal{U}(0{,}1)$. Encontrar una función g tal que $g(U)$ tenga distribución

   a) $\mathcal{E}(1)$
   b) Doble exponencial de parámetro uno, es decir, con función de densidad $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$
   c) $Bi(5, 1/3)$
   d) Una distribución discreta con rango $R_X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y respectivas probabilidades puntuales $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11. Don Zoilo tiene dos vacas, Aurora y Belinda. La cantidad de leche en litros que da Aurora en un día es una variable aleatoria X con distribución $\mathcal{E}(0{,}2)$. Belinda, en cambio, da 5 litros el 20 % de las veces que es ordeñada y el resto no da nada. Don Zoilo ordeña a Belinda solamente los días en que Aurora da menos de 6 litros.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que Aurora dé más de 6 litros en exactamente dos días de la próxima semana? Cabe aclarar que los fines de semana Don Zoilo no ordeña a sus vacas.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que Don Zoilo obtenga más de 8 litros en un día?
   c) Con la leche que obtiene de Aurora, Don Zoilo fabrica manteca. La cantidad de manteca en kilos que obtiene con X litros de leche es $W = g(X)$ siendo

$$g(X) = \begin{cases} \sqrt[3]{X} & \text{si } X \leq 8 \\ \frac{1}{7}(X-1)^2 - 5 & \text{si } 8 < X \leq 15 \\ 2X - 7 & \text{si } 15 < X \end{cases}$$

   Hallar la función de densidad de la cantidad de manteca fabricada.

[1] Este ejercicio muestra que la distribución exponencial exhibe una propiedad de falta de memoria análoga a la de la distribución geométrica. Esto no es coincidencia, como lo muestra el ejercicio siguiente.
[2] Mostrar que la integral impropia converge para todo $\alpha > 0$.