# Práctica : Otra demostración del Teorema Central del Límite usando funciones características.

**Ejercicio 0.** Notar que para demostrar el Teorema Central del Límite para una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con esperanza $\mu$ y varianza $\sigma^2$ finitas, basta demostrarlo para una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con esperanza 0 y varianza 1.

**Ejercicio 1.** Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con $\mathbb{E}(X_1) = 0$ y $V(X_1) = 1$. Definimos $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $Z_n = \sqrt{n}\bar{X}_n$. Expresar la función característica de $Z_n$ en términos de la función característica de $X_1$. Luego, aplicarle el desarrollo de Taylor de orden 2 y estudiar el límite cuando $n$ tiende a infinito.

**Ejercicio 2.** Aplicar el ejercicio anterior para el caso en que $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Deducir que la función característica de la distribución $\mathcal{N}(0,1)$ viene dada por $\phi_{X_1}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. (Sugerencia: Usar que si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución $\mathcal{N}(0,1)$, entonces $\sqrt{n}\bar{X}_n \sim X_1$. Este hecho se puede demostrar con el teorema de cambio de variables visto en la práctica 5).

**Ejercicio 3.** Concluir el Teorema Central del Límite.