Probabilidades y Estadística (M) Segundo parcial - 03 de diciembre de 2018

Apellido y Nombre: N° de libreta:

1	2	3	4	NOTA

El examen se aprueba sumando un total de 60 *puntos o más. La distribución de puntos por ejercicio es uniforme. Por favor entregar cada ejercicio en hojas separadas. Justificar todas las respuestas.*

1. Sean X_i variables aleatorias independientes con distribución de *Poisson* de parámetro λ_i para $i = 1, 2, 3$. Definimos las variables aleatorias $Y = X_1 + X_2$ y $Z = X_2 + X_3$.

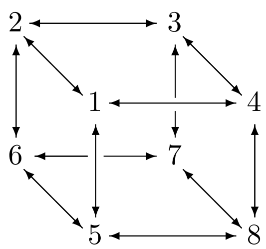
   (a) Hallar $\mathbb{E}[Y|Z]$, $\mathbb{V}[Y|Z]$ y la distribución de $X_2|Z = z$ para $z \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Calcular $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{V}[Y]$ y $\operatorname{cov}(Y, Z)$.

   (c) Sean $(X_{n,i})_{n\geq 1}$ v.a.i.i.d. con $X_{n,i} \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ para todo $n \geq 1$ y para $i = 1, 2, 3$. Hallar el límite en probabilidad y en casi todo punto de:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big[(X_{k,1})(X_{k,2} + X_{k,3})\big|X_{k,2} + X_{k,3}\big].$$

2. Una partícula realiza un paseo aleatorio por los vértices de un cubo como se muestra en la figura más abajo. Nunca permanece en un vértice y se mueve de un vértice u a otro vértice vecino v con probabilidad $\frac{1}{d(u)}$ (dos vértices son vecinos si tienen una arista en común). La constante $d(u)$ representa la cantidad de vecinos de u.



   Si X_n dice la posición de la partícula a tiempo n, entonces $(X_n)_{n\geq 0}$ es una *cadena de Markov.*

   (a) Dar la matriz de transición. Analizar si la cadena es irreducible, es decir, si partiendo de u se puede llegar a v en finitos pasos con probabilidad positiva, cualesquiera sean u y v.

   (b) Hallar la distribución invariante para la cadena y calcular el tiempo esperado de retorno a 1.

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que empezando en 1 llegue a 6 en dos pasos? Sea $Y_n = X_{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que $(Y_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov y hallar su matriz de transición. ¿Es irreducible?

   (d) Hallar una distribución invariante para la cadena $(Y_n)_{n\geq 0}$.

3. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.i.i.d. con $X_1 \sim \mathcal{U}[0, 1]$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ v.a.i.i.d. con $Y_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

   (a) Mostrar que para toda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(\lambda).$$

   (b) Definimos $(M_n)_{n\geq 1}$ por $M_n = \max\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que

$$n(1 - M_n) \xrightarrow{D} X \qquad \text{con} \qquad X \sim \operatorname{Exp}(1).$$

(c) Calcular el límite en distribución de $(Z_n)_{n\geq 1}$ nombrando los resultados teóricos utilizados, siendo:

$$Z_n = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2}{n\sum_{k=1}^{n}(X_k+1)} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

4. Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad *exponencial desplazada*

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(x).$$

(a) Encontrar $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(X_1, \cdots, X_n)$, el *E.M.V.* de θ basado en la muestra $X_1, \cdots, X_n$.

(b) Probar que $\widehat{\theta}_n$ es *fuertemente consistente*, es decir: $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{ctp} \theta$.

(c) Sea $Y_n = \text{mín}\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$. Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$.