APELLIDO Y NOMBRE: N° DE LIBRETA:

1	2	3	4	NOTA

El examen se aprueba sumando un total de 60 puntos o más. Justificar todas las respuestas

1. Se tienen $2N$ bolillas. Dos de ellas tienen el número 1, dos de ellas el número 2, dos de ellas el número 3, y así hasta el número N. Se quitan m bolillas al azar ($m \leq 2N$). Calcular el valor esperado de la cantidad de parejas que hay entre las $2N - m$ bolillas restantes. *Aclaración: una pareja son dos bolillas con el mismo número.*

2. Las variables aleatorias discretas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ se dicen *intercambiables* si para toda permutación $i_1, i_2, \cdots, i_n$ de $1, 2, \cdots, n$ se tiene

$$P(X_{i_1} = x_1, X_{i_2} = x_2, \cdots, X_{i_n} = x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$$

para todos $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

   a) Mostrar que si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son v.a. discretas intercambiables, entonces $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son idénticamente distribuídas.

   b) Mostrar que si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son v.a.i.i.d discretas, entonces $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son intercambiables. Dar un ejemplo donde se muestre que la vuelta puede no valer.

   c) Consideremos el siguiente experimento: Se tienen dos urnas U_1 y U_2, donde la urna U_i contiene b_i bolillas blancas y r_i bolillas rojas, $i = 1, 2$. Tirando una moneda que tiene probabilidad $p \in (0, 1)$ de salir cara, se elige una de las dos (digamos que con probabilidad p se elige U_1). A continuación se extraen con reposición n bolillas de la urna elegida. Se consideran las variables aleatorias

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si se obtuvo una bolilla roja en la extracción } i \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

   Mostrar que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son v.a. intercambiables. ¿Son independientes en general? ¿Se le ocurre alguna condición que garantice que lo sean?

3. Abel y Berta tienen negocios. El tiempo que tarda en llegar el primer cliente del día al negocio de Abel, respectivamente al negocio de Berta, es una v.a. X con distribución Exp(1), respectivamente una v.a. Y con distribución Exp(2). Dado que los negocios están alejados el uno del otro, se puede suponer que X e Y son independientes.

   (a) Durante el fin de semana, Berta le propone a Abel hacer la siguiente apuesta: si el lunes Berta recibe su primer cliente antes que Abel, Abel le paga 40 pesos a Berta; caso contrario, Berta le paga a Abel 70 pesos. ¿Le conviene a Abel esta apuesta? *Sugerencia: pensar en la esperanza de la ganancia de Abel.*

   (b) Para el cumpleaños de Berta, Abel decide comprarle un regalo de $500 \min\{2X, Y\}$ pesos. Calcular el valor esperado de lo que gastará Abel.

4. Se sabe que un avión perdido puede estar o bien en la región R_1 de 200km^2, o bien en la R_2 de 400km^2, o bien en la R_3 de 700km^2. La probabilidad de que se haya perdido en cada región es proporcional a su superficie. Hay tres equipos dedicados a buscar el avión, uno por región. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, si el avión se perdió en la región i, hay una probabilidad p_i de que el equipo correspondiente no lo encuentre. Suponiendo que el equipo de la región R_1 buscó y no encontró el avión, calcular, para cada i, la probabilidad de que el avión esté en la región i.