Probabilidad y Estadística (C) - Final - 21/12/2021

Apellido y Nombre: Libreta Nro.:
Mail: Nro de hojas(extras al enunciado).:

Criterio de aprobación: El examen consta de 11 ejercicios. Debe elegir 10 ejercicios para resolver (si resuelve los 11, no tomaré en cuenta el último aunque sea correcto). Cada ejercicio resuelto correctamente suma un punto. Se considera un ejercicio correctamente resuelto si la respuesta es correcta y se justificaron todos los pasos de la resolución. Se aprueba con mínimo 6 ejercicios bien hecho.

Envío del examen: Una vez terminado, por favor escanee su examen a pdf y mandelo a `probaFinal2021@gmail.com` con asunto 'APELLIDO, Nombre'. Recibirá una respuesta automática confrmando la recepción del mail. Antes de irse espere también que le confirme que esta todo en orden.

1. Dar la definición de una medida de probabilidad P. Demuestre a partir de la definición que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Una urna tiene 4 bolas negras y 3 rojas. Sacamos tres bolas sin reposición. ¿Cual es la probabilidad que la primera bola salga negra y la tercera salga roja?

3. Sea U una variable uniforme en $[0,1]$. Para $u \in [0,1]$ defina $h(u) = \max\{u, 1-u\}$. Calcule la función de densidad de $X = h(U)$, su distribución acumulada, esperanza y varianza.

4. Consideramos variables continuas X, Y no-negativas tales que $P(X \geq x, Y \geq y) = Ce^{-\lambda(x+y)}$ para $x, y \geq 0$. Calcule C, la distribución conjunta de (X, Y), las marginales de X e Y, y verificar que X e Y son independientes.

5. Sea $N \sim$ Poisson(λ) y $X_i \sim$Bernoulli(p), $i \geq 1$, variables aleatorias independientes. Calcule $E\big(\sum_{i=1}^{N} X_i\big)$.

6. Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números para variables aleatorias con esperanza y varianza finitas (admitiendo Tchebyshev).

7. Sean $X_1, X_2 \ldots$ v.a. i.i.d. con función de distribución exponencial de parámetro λ y sean $Y_1, Y_2 \ldots$ v.a. i.i.d. e independientes de las X_i con distribución uniforme en $(0,1)$. Considerar las variables
$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq 1\}} 1_{\{Y_i \leq 0.5\}}.$$
Hallar la esperanza y la varianza de Z_n, y el valor del límite en probabilidad de Z_n.

8. Enuncie el Teorema Central del Límite con todas sus hipótesis. Sea $(S_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $S_n \sim$ Binomial(n, p) con $p = 0.3$. Indique el valor del siguiente límite:
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - 0.3n}{\sqrt{0.3(1-0.3)n}} \leq 1.64 \right) = \ldots\ .$$

9. Hallar el estimador de máximo verosimilitud del párametro θ de la distribución
$$f(x) = \begin{cases} 2\theta\ x\ e^{-\theta x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Es consistente ?

10. Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. con distribución Exponencial de parámetro λ. Halle un intervalo de confianza de nivel exactamente $1 - \alpha$ para el parámetro λ. Sug: probar que si $X \sim Exp(\lambda)$ entonces $2\lambda \sim Exp(\frac{1}{2})$, luego deducir que $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{2}) = \chi^2_{2n}$.

11. Sea $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 9$ conocida. Se quiere testear la hipótesis $H_0 : \mu = 30$ contra $H_a : \mu > 30$. Se toma una muestra de tamaño 16 obteniendo un promedio muestral $\bar{x} = 31$. Calcule el P-valor y decida si se rechaza el test a nivel 0.01. Calcule el error de tipo 2 a nivel 0.01 si el valor verdadero de μ es $\mu = 32$.