Probabilidad y Estadística (C) - Final - 09/12/2021

Apellido y Nombre: Libreta Nro.:
Mail: Nro de hojas(extras al enunciado).:

Criterio de aprobación: El examen consta de 11 ejercicios. Debe elegir 10 ejercicios para resolver (si resuelve los 11, no tomaré en cuenta el último aunque sea correcto). Cada ejercicio resuelto correctamente suma un punto. Se considera un ejercicio correctamente resuelto si la respuesta es correcta y se justificaron todos los pasos de la resolución. Se aprueba con mínimo 6 ejercicios bien hecho.

Envío del examen: Una vez terminado, por favor escanee su examen a pdf y mandelo a `probaFinal2021@gmail.com` con asunto 'APELLIDO, Nombre'. Recibirá una respuesta automática confrmando la recepción del mail. Antes de irse espere también que le confirme que esta todo en orden.

1. Dar la definición de una medida de probabilidad P. Demuestre a partir de la definición que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Enuncie y demuestre la fórmula de la probabilidad total y el Teorema de Bayes.

3. En un día una gallina pone N huevos donde $N \sim Poisson(\lambda)$. Independientemente de la cantidad de huevos puestos, de un huevo cualquiera nace un pollito con probabilidad $p \in (0,1)$. Hallar la distribución de la cantidad de pollitos nacidos.

4. Sea $U \sim$ Uniforme$[0,1]$. Demuestre que $\frac{-\log(1-U)}{\lambda} \sim \text{Exp}(\lambda)$.

5. Sea $X_1, X_2, \ldots$ va i.i.d con distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda)$, y N una variable aleatoria independiente de las X_i con distribución geométrica de parámetro $p \in (0,1)$. Calcular la función característica de $Z := \sum_{i=1}^{N} X_i$ y deducir la distribución de Z.

6. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad
$$f_{(X,Y)}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} 1_{\{0<x<y\}}.$$
Qué distribución tiene $X|_{Y=y}$, para $y > 0$? Es una distribución 'clásica', debe reconocerla.

7. Sea $U_n \sim$ Uniforme$\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Calcule el límite en distribución de U_n cuando $n \to \infty$.

8. Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números para variables aleatorias con esperanza y varianza finitas (admitiendo Tchebyshev).

9. Hallar el estimador de máximo verosimilitud del párametro a de la distribución
$$f(x) = \begin{cases} ax^{-(a+1)} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$
donde $a > 1$. ¿Es consistente ?

10. Construya un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para la media de la distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ con varianza conocida. Y si no se conoce la varianza ?

11. Se toman 25 mediciones de la temperatura en cierto sector de un reactor obteniéndose un promedio muestral $\bar{x} = 249^o C$ y un desvío muestral $s = 2.8^o C$. A nivel $\alpha = 0.05$ decida si (a) la temperatura media en ese sector del reactor es menor que $250^o C$ y (b) la varianza de la temperatura en ese sector del reactor es mayor que $(2^o C)^2$. Suponga los datos normales.