Matemática I (B) — 2$^{\text{do}}$ cuatrimestre de 2023

Práctica 5 — Polinomio de Taylor

En una variable

1. Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones, de los órdenes n indicados y en los puntos x_0 dados.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1; \quad n = 1, 2, 3; \quad x_0 = 0, 2$
b) $f(x) = \operatorname{sen} x; \quad n = 5; \quad x_0 = 0, \frac{\pi}{2}$
c) $f(x) = \sqrt{x}; \quad n = 4; \quad x_0 = 4$
d) $f(x) = \ln(1 + x^2); \quad n = 1, 2, 3; \quad x_0 = 0$
e) $f(x) = e^x; \quad n = 1, 2, 3; \quad x_0 = 0$
f) $f(x) = x^2 e^x; \quad n = 1, 2, 3; \quad x_0 = 0$

Verifique que los polinomios obtenidos en *a*) para $n \geq 2$ coinciden con f.

2. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Para cada $n \geq 0$, denotemos por $p_n(x)$ al polinomio de Taylor de f de orden n centrado en $x_0 = 0$.

Con la ayuda de una computadora, grafique simultáneamente para $n = 0, 1, 2, 3$:

- $f(x), \quad -4 \leq x \leq 4.$
- $p_n(x), \quad -4 \leq x \leq 4.$

¿Qué observa que sucede "cerca" de 0 a medida que n aumenta? ¿Y "lejos" de 0?

3. Sea f una función tal que la recta tangente al gráfico de f en el punto de abcisa $x_0 = -1$ tiene ecuación $y = 5x + 7$, y tal que $f''(-1) = 3$. Halle los polinomios de Taylor de órdenes 1 y 2 centrados en -1 para f.

4. Se sabe que el polinomio de Taylor de f de orden 5 centrado en $x_0 = -2$ es

$$p(x) = -1 + 2x - 3x^4.$$

Calcule $f^{(n)}(-2)$ para $0 \leq n \leq 5$. ¿Se puede determinar a partir de estos datos cuánto vale $f^{(6)}(-2)$? ¿Y cuánto vale $f(0)$?

5. El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x_0 = 0$ de la función f es

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + x + 7.$$

Halle el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_1 = 2$ para la función

$$h(x) = f(x^2 - 3x + 2).$$

6. Los polinomios de Taylor de orden 4 centrados en $x_0 = 2$ de las funciones f y g son, respectivamente,

$$p(x) = -2+3(x-2)-3(x-2)^2+(x-2)^3, \qquad q(x) = 5+12(x-2)^2-7(x-2)^4.$$

Halle el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x_0 = 2$ para la función

$$h(x) = f(x)g(x).$$

7. Se representa con x al tamaño de una cierta población, y por $f(x)$ a la función que describe el crecimiento de esa población en función de su tamaño x. Se escribe al polinomio de Taylor de f de orden 2 centrado en $x_0 = 0$ como

$$p(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde r y K son constantes positivas. Exprese las constantes r y K en términos de f y sus derivadas en $x_0 = 0$.

Nota: Esta ecuación describe el llamado *crecimiento logístico*; r es la tasa de crecimiento intrínseca de la población y K es la capacidad de persistencia.

8. Para cada una de las siguientes funciones, calcule los polinomios de Taylor de los primeros órdenes centrados en $x_0 = 0$, y a partir de eso conjeture una fórmula para el polinomio de Taylor de orden 15.

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

c) $f(x) = \ln(1+x)$

d) $f(x) = \cos(x)$

9. Para cada una de las siguientes funciones f, calcule el polinomio de Taylor p del orden n indicado centrado en el punto x_0 dado, y la correspondiente fórmula para el error. Utilizando esta fórmula, acote el error que se comete al aproximar a $f(x_1)$ por $p(x_1)$.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x; \quad n = 2; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = 0{,}3$

b) $f(x) = \cos x; \quad n = 3; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = 0{,}3$

c) $f(x) = e^x; \quad n = 3; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = 0{,}8$

Sugerencia: Recuerde que $e < 3$.

d) $f(x) = \sqrt{x}; \quad n = 2; \quad x_0 = 4; \quad x_1 = 4{,}1$

Verifique que las cotas obtenidas son correctas, comparando los valores de $f(x_1)$ y $p(x_1)$ usando una calculadora.

En varias variables

10. Para cada una de las siguientes funciones f, calcule todas las derivadas parciales de primer y segundo orden.

a) $f(x,y) = (x+y)^2$

b) $f(x,y) = e^{x-y}$

c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

d) $f(x,y) = x\ln(x+y)$

11. Para cada una de las funciones del Ejercicio 10, calcule los polinomios de Taylor de órdenes 1 y 2 en los puntos (x_0, y_0) indicados.

a) $(x_0, y_0) = (0,0)$; $(x_0, y_0) = (1,-2)$

b) $(x_0, y_0) = (0,0)$

c) $(x_0, y_0) = (0,0)$; $(x_0, y_0) = (1,\pi)$

d) $(x_0, y_0) = (1,0)$

Verifique que los polinomios (de orden 2) obtenidos en *a*) coinciden con f.

12. Con la ayuda de una computadora grafique, en un entorno de $(0,0)$, la función $f(x,y) = e^{x-y}$, junto con su plano tangente y su polinomio de Taylor de orden 2 en $(0,0)$.

Repita lo hecho para la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en $(0,0)$.

13. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, calcule todas las derivadas parciales de primer y segundo orden.

a) $f(x,y,z) = \ln(1+x^2+y^2+z^2) + 2x - 1$

b) $f(x,y,z) = z^2\cos(xy)$

14. Para cada una de las funciones del Ejercicio 13, calcule los polinomios de Taylor de órdenes 1 y 2 centrado en los puntos (x_0, y_0, z_0) indicados.

a) $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$; $\quad (x_0, y_0, z_0) = (0,0,1)$

b) $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$