Matemática I (B) — 2$^{\text{do}}$ cuatrimestre de 2023

Práctica 1 — Vectores y números complejos

Vectores

1. Calcule la norma de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ según corresponda:

a) $\vec{u} = (1,2)$; $\quad \vec{v} = (-1,-2)$
b) $\vec{u} = (-3,4)$; $\quad \vec{v} = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$
c) $\vec{u} = (0,1,2)$; $\quad \vec{v} = (-1,1,1)$; $\quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
d) $\vec{u} = (2,-1,3)$; $\quad \vec{v} = -2 \cdot \vec{u}$

¿Qué propiedades de la norma observa que se verifican?

2. Se aplican sobre una caja tres fuerzas concurrentes. Las componentes cartesianas de cada fuerza son $(1N, 2N)$, $(-1N, 3N)$ y $(-1N, -2N)$, donde las unidades de fuerza se expresan en Newton.

¿Cuáles son las componentes de la fuerza resultante que se aplica sobre la caja? ¿Cuánto vale la norma de dicha fuerza?

3. Grafique los siguientes subconjuntos del plano:

a) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(1,-1)) = 2\}$
b) $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,-y) \in X\}$
c) $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) + (3,2) \in X\}$
d) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2(x,y) \in X\}$
e) $W = \{(x,y) \in X : d((x,y),(-1,1)) = 2\}$

4. Determine todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:

a) $\vec{v} = k \cdot (2,2,1)$ y $\|\vec{v}\| = 1$
b) $\vec{v} = (4,k)$ y $\|\vec{v}\| = 5$
c) $\vec{v} = k \cdot (1,1) + (0,2)$ y $\|\vec{v}\| = 1$
d) $\vec{v} = (1,k,0)$ y $\|\vec{v}\| = 2$
e) $A = (1,1,1)$, $B = (k,-k,2)$ y $d(A,B) = 2$

En cada caso, interprete geométricamente el problema y el resultado.

5. Dados los vectores $\vec{v} = (1,-2,2)$, $\vec{w} = (2,0,3)$ y $\vec{z} = (4,4,4)$, calcule:

a) $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\vec{w} \cdot \vec{v}$

b) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z}$; $(\vec{v} \cdot \vec{z}) + (\vec{w} \cdot \vec{z})$

c) $(3\vec{v}) \cdot \vec{w}$; $3(\vec{v} \cdot \vec{w})$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v}$; $\vec{w} \cdot \vec{w}$

¿Qué propiedades del producto escalar observa que se verifican?

6. Halle el ángulo entre los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{v} = (1,1)$; $\vec{w} = (-1,0)$

b) $\vec{v} = (1,2)$; $\vec{w} = (-2,1)$

c) $\vec{v} = (1,\sqrt{3})$; $\vec{w} = (-2,2\sqrt{3})$

d) $\vec{v} = (1,1,3)$; $\vec{w} = (2,1,-1)$

e) $\vec{v} = (2,1,1)$; $\vec{w} = (1,-1,2)$

f) $\vec{v} = (1,1,\sqrt{2})$; $\vec{w} = (1,1,0)$

7. Describa gráfica y analíticamente los siguientes subconjuntos del plano:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \measuredangle((x,y),\,(1,0)) = \pi/4, \quad \|(x,y)\| = 1\}$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \measuredangle((x,y),\,(1,0)) = \pi/4\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \measuredangle((x,y),\,(1,0)) \in [0,\pi/2], \quad \|(x,y)\| = 1\}$

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \measuredangle((x,y),\,(1,0)) \in [0,\pi/2]\}$

8. *a)* En cada caso, calcule el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$:

I. $\vec{v} = (1,0,0)$; $\vec{w} = (0,1,0)$

II. $\vec{v} = (1,3,5)$; $\vec{w} = (3,0,-2)$

III. $\vec{v} = (1,1,-2)$; $\vec{w} = (-2,-2,4)$

IV. $\vec{v} = (1,-2,3)$; $\vec{w} = (0,0,0)$

Verifique que el resultado es ortogonal a v y a w. ¿En qué casos el resultado es el vector $(0,0,0)$?

b) Halle tres vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a los vectores $\vec{v} = (1,3,5)$ y $\vec{w} = (3,0,-2)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?

c) Halle tres vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a los vectores $\vec{v} = (1,1,-2)$ y $\vec{w} = (-2,-2,4)$ simultáneamente.

Números complejos

9. Calcule la forma binómica y el módulo de z en los siguientes casos:

a) $z = (3-i) + 2i + (3+i)$

b) $z = 1 - i(2+i)$

c) $z = (1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$

d) $z = (3+4i)(3-i)^2$

10. Calcule el conjugado y el inverso de z en los siguientes casos:

a) $z = i$

b) $z = 1 - i$

c) $z = 3 + 4i$

d) $z = (1 - i)^2$

11. Calcule el módulo de los siguientes números complejos:

a) $z = 4(3 - 4i)$

b) $z = (1 + 2i)^8$

c) $z = (-3 + 4i)^{-5}$

d) $z = (3 - 4i)^{-5}(1 + 2i)^4$

12. Halle todos los números complejos z que satisfacen:

a) $(1 + i)z + 5 = 2 - 3i$

b) $i(z - 5) = (1 + 3i)z$

c) $\frac{z-i}{z} = 2 + i$

d) $z + \overline{z} = 4$

e) $z - \overline{z} = 1$

f) $z = 3\overline{z} + 1$

13. Halle todos los números complejos z que satisfacen:

a) $z^2 = -3$

b) $z^2 + z + 1 = 0$

c) $\overline{z}^2 = 2\overline{z} - 5$

d) $z - 4 = 5z^{-1}$

14. Grafique los siguientes subconjuntos del plano complejo:

a) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - (1 - i)| = 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |\overline{z} - (1 - i)| = 2\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |z| < 2\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \arg(z) = \pi/4\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \arg(z) \in [0, \pi/2]\}$

f) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \arg(iz) = 0, |z| \geq 3\}$

Compare con lo realizado en los ejercicios 3 y 7.

15. Calcule el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, y represéntelos en el plano.

a) $z = e^{\pi i}$

b) $z = 2\,e^{2\pi i}$

c) $z = \frac{1}{3}\,e^{\pi/4i}$

d) $z = e^{\ln(3) + 7\pi/2i}$

e) $z = 2\cos(-\pi/4) + 2i\,\mathrm{sen}(-\pi/4)$

f) $z = \cos(7\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(-7\pi/6)$

16. Halle la forma exponencial de los siguientes números complejos:

a) $z = 1 + i$
b) $z = -1 + \sqrt{3}i$
c) $z = -1 - \sqrt{3}i$
d) $z = (-1 + \sqrt{3}i)^{-1}$

Utilizando lo calculado, halle la forma exponencial de los conjugados de estos números complejos.

17. Sean z, w los números complejos

$$z = 1 + i, \quad w = \cos(2\pi/5) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/5).$$

Grafique los siguientes números complejos:

a) $z^n, \quad n = 1, 2, \ldots, 8$
b) $w^n, \quad n = 1, 2, \ldots, 10$
c) $z \cdot w^n, \quad n = 1, 2, \ldots, 10$

18. Halle la forma binómica de los siguientes números complejos:

a) $z = i^{13}$
b) $z = (1 - i)^{10}$
c) $z = (-1 + \sqrt{3}i)^{-5}$
d) $z = (1 - i)^{11}(-1 - \sqrt{3}i)^{-10}$

19. Calcule las raíces n-ésimas de z en cada uno de los siguientes casos, expresándolas en forma exponencial y binómica.

a) $n = 6; \quad z = 1$
b) $n = 6; \quad z = 64$
c) $n = 3; \quad z = -1$
d) $n = 4; \quad z = i$
e) $n = 3; \quad z = -1 + \sqrt{3}i$
f) $n = 2; \quad z = 2(1 + i)$

20. Para cada vector $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$, rescribir a $\vec{v}$ como $\vec{v} = \vec{u} + i\vec{w}$ con $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$.

a) $\vec{v} = (1, -2i)$
b) $\vec{v} = (1 + i, -1)$
c) $\vec{v} = (3 + 2i, -1 - 4i)$
d) $\vec{v} = (2 + i)(1 + i, -i)$