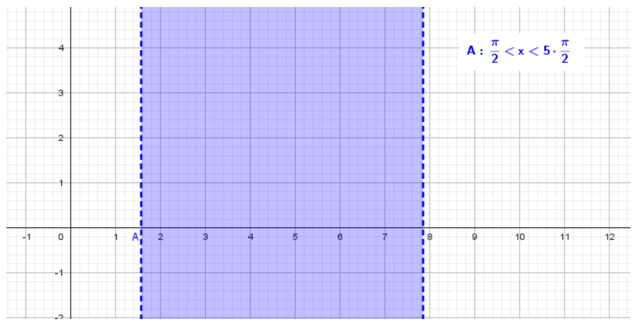
- **Ejercicio 1**: Determinar los extremos relativos de

$$f(x,y) = y\sin(x)$$

Restingida a la región $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{2}\right\}$

Primero veamos como es nuestra región A



Busquemos los puntos críticos de f en A. Para eso recordemos que debemos buscar aquellos puntos (x_0, y_0) pertenecientes a A tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y\cos(x) \\ \\ f_y(x,y) = \sin(x) \end{cases} \rightsquigarrow \nabla f(x,y) = (y\cos(x), \sin(x))$$

Necesitamos que:

$$\begin{cases} y\cos(x) = 0 \\ \\ \sin(x) = 0 \leftrightsquigarrow \sin(x) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En el caso de

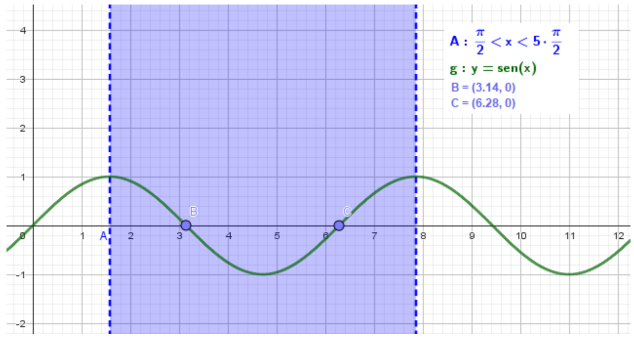
$$y\cos(x) = 0$$

Resulta que si $x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, entonces $\cos(k\pi) \neq 0$,por lo que en este caso f_x solo se anula si $y = 0$.

Ahora bien, $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{2}$ armemos una inecuación para ver los puntos x en A que nos sirven a nosotros.

$$\frac{\pi}{2} < k\pi < \frac{5\pi}{2} \leftrightsquigarrow 0,5 = \frac{1}{2} < k\pi < \frac{5}{2} = 2,5 \leftrightsquigarrow k = 1,2$$

Otra forma de verlo sería graficamente:



Por lo tanto los puntos críticos de f en A son $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$. Veamos si son máximos,mínimos o puntos silla de f en A. Para ello armemos la matriz hessiana y calculemos su determinante. Recordemos que si el determinante es positivo y $f_{xx}(p) > 0$,entonces el punto p es un mínimo de f, si el determinante es positivo y $f_{xx}(p) < 0$,entonces el punto p es un máximo de f, y si el determinante es negativo ,entonces p es un punto silla de f.

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = -y\sin(x) \\ \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \cos(x) \\ \\ f_{yy}(x,y) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\sin(x) & \cos(x) \\ \\ \cos(x) & 0 \end{pmatrix}$$

a) $(\pi, 0) \rightsquigarrow H(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$. Luego $(\pi, 0)$ es punto silla de f en A.

b) $(2\pi, 0) \rightsquigarrow H(2\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$. Luego $(2\pi, 0)$ es punto silla de f en A.

- **Ejercicio 2**: Hallar (si existen) los máximos y mínimos **absolutos** de f restringida al conjunto A . Donde;

$$f(x,y) = x^2 - 2y$$

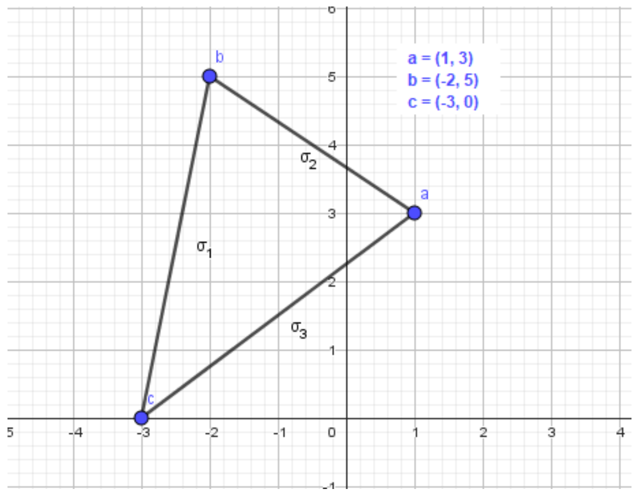
Y $A =$ borde del triángulo de vértices $\quad a = (1,3), b = (-2,5) \quad$ y $\quad c = (-3,0)$.

Observaciones)

- Como $A \subset \mathbb{R}^2$ es compacto,f alcanza máximos y mínimos absolutos en A (Weierstrass)
- A es una unión de curvas suaves (segmentos)
- Los vértices del triángulo se consideran puntos críticos.
- Dados p, q puntos en $\mathbb{R}^2$ el segmento que une p y q se puede parametrizar mediante

$$\sigma(t) = (1-t)q + tp, \quad 0 \le t \le 1$$

Veamos como es A y parametricemos cada segmento para encontrar los puntos críticos.Por una de las observaciones,ya sabemos que los vértices van a ser puntos críticos, para ver si hay más la idea es hacer lo que hicimos la clase pasada,dada la parametrización,componemos a f con esta y encontramos los puntos críticos de la composición que al ser una nueva función en $\mathbb{R}$ es más facil.



a) $\sigma_1(t) = (1-t)(-3,0) + t(-2,5) = (-3(1-t) - 2t, 5t) = (t-3, 5t), \quad 0 \le t \le 1$

Sea ahora:

$$h_1(t) = (f \circ \sigma_1)(t) = f(\sigma_1(t)) = f(t-3, 5t) = (t-3)^2 - 10t$$

Luego, $h_1'(t) = 2(t-3) - 10$

Obs) Otra forma hubiese sido calcular la derivada mediante

$$h_1'(t) = \nabla f(\sigma_1(t)).\sigma_1'(t), \quad \nabla f(x,y) = (2x, -2)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} h_2'(t) &= 0 \\ 2(t-3) - 10 &= 0 \\ 2(t-3) &= 10 \\ t - 3 &= 5 \\ t &= 8, \text{pero} \quad t = 8 \notin [0,1] \end{aligned}$$

b) $\sigma_2(t) = (1-t)(-2,5) + t(1,3) = (-2(1-t) + t, 5(1-t) + 3t) = (3t-2, -2t+5), \quad 0 \le t \le 1$

Sea ahora:

$$h_2(t) = (f \circ \sigma_2)(t) = f(\sigma_2(t)) = f(3t-2, -2t+5) = (3t-2)^2 - 2(-2t+5) = 9t^2 - 8t - 6$$

Luego, $h_2'(t) = 18t - 8$

$$\begin{aligned} h_2'(t) &= 0 \\ 18t - 8 &= 0 \\ 18t &= 8 \\ t &= \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \in [0,1] \end{aligned}$$

Ahora veamos con que punto se corresponde en A. Para ello evaluamos el t hallado en $\sigma_2(t)$.

$$\sigma_2(t) = (3t-2, -2t+5) \rightsquigarrow \sigma_2\left(\frac{4}{9}\right) = \left(3\frac{4}{9} - 2, -2\frac{4}{9} + 5\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{37}{9}\right)$$

Sea $d = \left(-\frac{2}{3}, \frac{37}{9}\right)$

c) $\sigma_3(t) = (1-t)(1,3) + t(-3,0) = ((1-t) - 3t, 3(1-t)) = (-4t+1, -3t+3), \quad 0 \leq t \leq 1$

Sea ahora:

$$h_3(t) = (f \circ \sigma_3)(t) = f(\sigma_3(t)) = f(-4t+1, -3t+3) = (-4t+1)^2 - 2(-3t+3) = 16t^2 - 2t - 5$$

Luego, $h_3'(t) = 32t - 2$

$$\begin{aligned} h_3'(t) &= 0 \\ 32t - 2 &= 0 \\ 32t &= 2 \\ t &= \frac{2}{32} = \frac{1}{16} \in [0,1] \end{aligned}$$

Ahora veamos con que punto se corresponde en A. Para ello evaluamos el t hallado en $\sigma_3(t)$.

$$\sigma_3(t) = (-4t+1, -3t+3) \rightsquigarrow \sigma_3\left(\frac{1}{16}\right) = \left(-4\frac{1}{16} + 1, -3\frac{1}{16} + 3\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{45}{16}\right)$$

Sea $e = \left(\frac{3}{4}, \frac{45}{16}\right)$

Finalmente evaluemos f en cada punto crítico y solo veamos cual es son máximos y mínimos absolutos (puede haber más de uno).

$$\begin{cases} a = (1,3) \rightsquigarrow f(1,3) = -5 \\ b = (-2,5) \rightsquigarrow f(-2,5) = -6 \\ c = (-3,0) \rightsquigarrow f(-3,0) = 9 \rightsquigarrow \text{máximo absoluto} \\ d = \left(-\frac{2}{3}, \frac{37}{9}\right) \rightsquigarrow f\left(-\frac{2}{3}, \frac{37}{9}\right) = -\frac{70}{9} \approxeq -7,8 \rightsquigarrow \text{mínimo absoluto} \\ e = \left(-\frac{2}{3}, \frac{37}{9}\right) \rightsquigarrow f\left(\frac{3}{4}, \frac{45}{16}\right) = -\frac{81}{16} \approxeq -5,06 \end{cases}$$

- **Ejercicio 3**: Determinar los extremos **absolutos** de f restringida al conjunto A . Donde

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

Y $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-3)^2 = 4\right\}$
A partir de las restricciones que nos da el conjunto A sobre las variables x e y podemos despejar x^2 en función de y.

$$x^2 + (y-3)^2 = 4 \leftrightsquigarrow x^2 = 4 - (y-3)^2$$

remplazando en f obtenemos una nueva función de una sola variable,que llamamos g

$$g(y) = 4 - (y-3)^2 - y^2 = -2y^2 + 6y - 5$$

Buscamos los puntos críticos de g:

$$g'(y) = -4y + 6 \rightsquigarrow g'(y) = 0 \leftrightsquigarrow y = \frac{3}{2}$$

Para saber que tipo de punto es $y = \frac{3}{2}$ en g usamos el criterio de la seegunda derivada.

Criterio de la segunda derivada: Sea $h : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por lo menos dos veces derivable y $p \in D$ punto crítico de h. Entonces:

- si $h''(p) > 0$, p es un mínimo local de h.
- si $h''(p) < 0$, p es un máximo local de h.

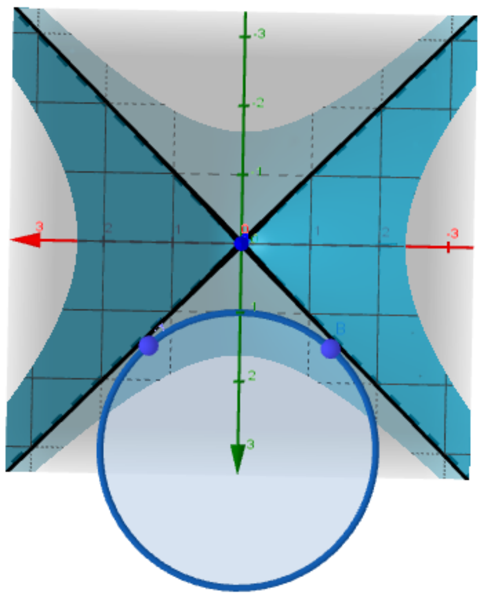
Luego, $g''(y) = -4 < 0 \rightsquigarrow y = \frac{3}{2}$ es un máximo local de g.

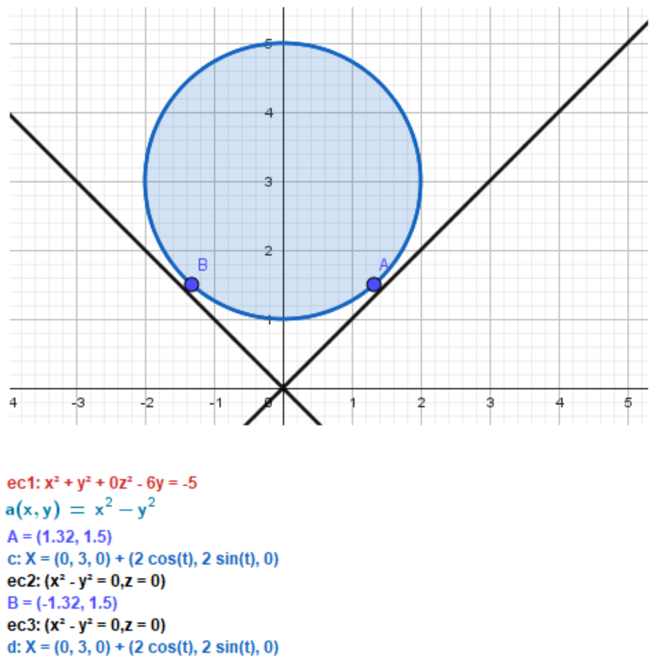
Veamos a que valor(es) de x corresponde $y = \frac{3}{2}$:

$$x^2 = 4 - \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} \rightsquigarrow x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Entonces, f alcanza un máximo local en $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

El máximo vale $f\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$





- **Ejercicio 4**: Encuentre los puntos de la superficie

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 5x-y+2z=3\right\}$$

Que están más cerca del origen.¿Cual es la distancia del punto hallado al origen?

Recordemos que dado $p=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ la distancia de p al origen viene dada por la fórmula:

$$d(p,0)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Queremos minimizar los valores de la función d restringida a S. Pero d es una función creciente,por lo que trabajar con d o d^2 es indistinto.Entonces buscamos minimizar los valores de

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

Restingida a la ecuación $5x-y+2z=3 \leftrightsquigarrow y=5x+2z-3$

Remplazando y en f obtenemos una función g de dos variables.

$$g(x,z)=x^2+(5x+2z-3)^2+z^2$$

Entonces hacemos lo mismo de siempre trabajando con los ceros del gradiente de g y su matriz Hessiana.

$$\begin{cases} f_x(x,z) = 2x + 10(5x + 2z - 3) \\ \\ f_z(x,z) = 4(5x + 2z - 3) + 2z \end{cases} \rightsquigarrow \nabla f(x,z) = (52x + 20z - 30, 20x + 10z - 12)$$

Necesitamos que:

$$\begin{cases} 52x + 20z - 30 = 0 \\ \\ 20x + 10z - 12 = 0 \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} 52x + 20z - 30 = 0 \\ \\ 40x + 20z - 24 = 0 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones resulta;

$$12x - 6 = 0 \leftrightsquigarrow x = \frac{1}{2}$$

remplazando $x = \dfrac{1}{2}$ en $f_z(x,z)$

$$10z - 2 = 0 \leftrightsquigarrow z = \frac{1}{5}$$

Entonces $(x,z) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}\right)$ es punto crítico de g, veamos si es mínimo:

$$\begin{cases} f_{xx}(x,z) = 52 \\ \\ f_{xz}(x,z) = f_{zx}(x,z) = 20 \\ \\ f_{zz}(x,z) = 10 \end{cases} \rightsquigarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 20 \\ \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det\left(H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)\right) = 120 > 0$$

Como además $f_{xx}(x,z) = 52 > 0$,entonces $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}\right)$ es un mínimo de g.

Remplazando $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}\right)$ en y obtenemos el punto buscado:

$$y = 5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{5} - 3 = -\frac{1}{10}$$

Luego en $p = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{5}\right)$,f tiene un mínimo restringida a S.

¿Cual es la distancia del punto hallado al origen?

$$d(p,0) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{100} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$