CLASE 22. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEOS

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Repaso

Vimos las clases pasadas:

1.1. En una dimensión.

1.1. En una dimensión. Si me dan la ecuación lineal homogénea a coeficientes constantes:

$$x' = ax$$

entonces, todas las soluciones son:

$$x(t) = ke^{at}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Si me piden ahora resolver la ecuación lineal no homogénea:

$$x' = ax + g(t)$$

hacíamos variación de los parámetros y considerábamos $x(t) = k(t)e^{at}$, lo "metíamos" en la ecuación no homogénea y encontrábamos $k(t)$:

$$\underbrace{k'(t)e^{at} + k(t)ae^{at}}_{x'(t)} = a\underbrace{k(t)e^{at}}_{x(t)} + g(t) \quad \Longrightarrow \quad k'(t)e^{at} = g(t) \quad \Longrightarrow \quad k'(t) = e^{-at}g(t).$$

De acá calculábamos todas las primitivas de $e^{-at}g(t)$ que escribimos como $K(t) + c$, donde $K(t)$ es una primitiva, y c cualquier constante, y obtenemos

$$x(t) = (k(t) + c)e^{-at}.$$

1.2. En dos dimensiones. Estudiamos sistemas lineales homogéneos a coeficientes constantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matriz de 2×2 con coeficientes reales.

Vimos que si A de diagonaliza en $\mathbb{R}$, es decir, existen λ, μ autovalores y $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ autovectores asociados, respectivamente, entonces

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

(que tienen como domimio todo $\mathbb{R}$) son ambas soluciones de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \underset{\substack{\text{todo}\\ \text{junto}}}{\Longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

Si llamamos

$$S(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix},$$

a $S(t)$ se le dice matriz fundamental de soluciones, nos queda que:

$$S'(t) = AS(t)$$

Se sabe, además, que $S(t)$ es una matriz inversible para todo t, y cualquier solución de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= k_1 e^{\lambda t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + k_2 e^{\mu t}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= S(t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Si A tiene un solo autovalor real y no es diagonalizable en $\mathbb{R}$, no estudiamos este caso.

Si A no se diagonaliza un $\mathbb{R}$ pero si se diagonaliza en $\mathbb{C}$ (tiene autovalores y autovectores complejos, no reales), entones se tiene $\lambda = a+bi$, $\bar{\lambda} = a-bi$ autovalores complejos no reales con $b \neq 0$ y $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}$ los autovectores asociados respectivamente. En este caso vimos que

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left(e^{(a+bi)t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\left(e^{(a+bi)t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$$

son ambas soluciones reales de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con lo cual tendremos que si

$$S(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental de soluciones, de nuevo

$$S'(t) = AS(t)$$

y cualquier solución será:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

con $S(t)$ inversible para tods $t \in \mathbb{R}$.

En cualquier caso vimos que dado un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

si la matriz A s diagonalizable en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se construyen dos soluciones reales $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ con las cuales se arma la matriz fundamental de soluciones

$$S(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$$

que es inversible para todo t y satisface

$$S(t) = AS(t).$$

Ademas, cualquier solución real de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ viene dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Sistemas no homogéneos

Supongamos que ahora tenemos el ecosistema de dos especies de la clase pasada con una tasa de migración externa de individuos de la especie x:

$$\begin{cases} x'(\theta) = -\frac{2}{3}x(t) - \frac{2}{3}y(t) + e^{-2t} \\ y'(t) = \frac{2}{3}x(t) - \frac{7}{3}y(t) \end{cases}$$

Nos piden:

1. Encontrar todas las soluciones $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
2. Encontrar la única que satisface $x(0) = 70, y(0) = 50$.

Al igual que en dimensión 1, primero resolvemos el homogéneo y luego hacemos variación de los parámetros (que ahora son k_1 y k_2).

a) Resolvemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De la clase pasada nos quedó que

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces cualquier solución es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\left(e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}_{S(t)} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

b) El sistema no homogéneo matricialmente se ve así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proponemos soluciones así:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}.$$

Al derivar este producto matricial, se usa la propiedad de derivada del producto y queda:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = S'(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} + S(t) \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix}$$

Entonces para que la propuesta $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sea solución del sistema no homogéneo se debe satisfacer:

$$\underbrace{S'(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} + S(t) \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'} = A\, \underbrace{S(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y como $S'(t) = AS(t)$ nos queda

$$AS(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} + S(t) \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = AS(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$S(t) \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y queremos encontrar k_1', k_2'. Recordemos quién era $S(t)$, y nos queda:

$$\begin{pmatrix} 2e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$2e^{-t}k_1'(t) + e^{-2t}k_2'(t) = e^{-2t} \quad \text{y} \quad e^{-t}k_1'(t) + 2e^{-2t}{k_2}'(t) = 0.$$

De la segunda ecuación obtenemos
$$k_1'(t) = -2e^{-2t}k_2'(t)e^t \qquad \Longrightarrow \qquad k_1'(t) = -2e^{-t}k_2'(t).$$
Reemplazando en la primera ecuación:
$$2e^{-t}\left(-2e^{-t}k_2'(t)\right) + e^{-2t}k_2'(t) = e^{-2t} \qquad \Longrightarrow \qquad -4e^{-2t}k_2'(t) + e^{-2t}k_2'(t) = e^{-2t} \qquad \Longrightarrow \qquad -3e^{-2t}k_2'(t) = e^{-2t}$$
$$\Longrightarrow \qquad k_2'(t) = -\frac{1}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad k_2(t) = -\frac{1}{3}t + c_2$$
y
$$k_1'(t) = -2e^{-t}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}e^{-t} \qquad \Longrightarrow \qquad k_1(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + c_1.$$
Juntando esto con la propuesta nos queda
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= S(t)\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{-t} + c_1 \\ -\frac{1}{3}t + c_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{2}{3}e^{-t} + c_1\right)e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}t + c_2\right)e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$
con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son todas las soluciones pedidas en el ítem 1).

Para el ítem 2), buscamos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ para las cuales $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix}$:
$$\begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \left(-\frac{2}{3} + c_1\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
entonces
$$\begin{aligned} 70 &= 2\left(-\frac{2}{3} + k_1\right) + c_2 \\ 50 &= \left(\frac{-2}{3} + c_1\right) + 2c_2 = -\frac{2}{3} + c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$
de la segunda ecuación, $c_1 = 50 + \frac{2}{3} - 2c_2$ y usando este despeje en la primera ecuación
$$\begin{aligned} 70 &= 2\left(-\frac{2}{3} + 50 + \frac{2}{3} - 2k_2\right) + c_2 \\ &= 100 - 4c_2 + c_2 = 100 - 3c_2 \end{aligned}$$
entonces $3c_2 = 30 \Rightarrow c_2 = 10$ y así $c_1 = 30 + \frac{2}{3}$.

La solución buscada es:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(-\frac{2}{3}e^{-t} + 30 + \frac{2}{3}\right)e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}t + 10\right)e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Ecuaciones no homogéneas. Caso general

En general (tanto para autovalores reales como complejos) si queremos resolver un sistema lineal a coeficientes constantes no homogéneo
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$
con A una matriz diagonalizable en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, construimos $S(t)$ la matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Proponemos
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}$$

como solución del no homogéneo y nos queda:

$$\underbrace{S'(t)\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} + S(t)\begin{pmatrix} k'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}} = A\,\underbrace{S(t)\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

y como $S'(t) = AS(t)$ nos queda:

$$S(t)\begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Como $S(t)$ siempre es imversible se puede calcular $S(t)^{-1}$ y obtener:

$$\begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = (S(t))^{-1}\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

luego reemplazamos $\begin{pmatrix} K_1(t)+c_1 \\ K_2(t)+c_2 \end{pmatrix}$ en la propuesta y nos quede que todas las soluciones reales son:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix} K_1(t)+c_1 \\ K_2(t)+c_2 \end{pmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Hagamos un caso con autovalores complejos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

a) Resolvemos el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y nos queda que todas las soluciones vienen dadas por: (hecho la clase pasada)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Llamamos

$$S(t) = \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

y sabemos que

$$S'(t) = AS(t).$$

b) Proponemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}$$

Buscamos $\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}$ para que esta sea una solución del no homogéneo, nos queda:

$$\underbrace{S'(t)}_{A\cdot S(t)}\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} + S(t)\begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = AS(t)\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$S(t)\begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

con

$$S(t) = \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Calculamos $[S(t)]^{-1}$. Para ello

$$\begin{aligned} \det(S(t)) &= (-\cos t - \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t - \cos t(-\operatorname{sen} t + \cos t) \\ &= -\cos t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t + \cos t \operatorname{sen} t - \cos^2 t \\ &= -\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t = -1 \end{aligned}$$

entonces

$$(S(t))^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t - \cos t \\ -\cos t & -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cot t \\ \cos t & \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} &= (S(t))^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t \\ \cos t & \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t(\operatorname{sen} t + \cos t) - (-\operatorname{sen} t + \cos t) \cdot \cos t \\ \cos t(\operatorname{sen} t + \cos t) - (\cos t + \operatorname{sen} t) \cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen} t \cos t - \cos^2 t \\ \cos t \operatorname{sen} t + \cos^2 t - \cos^2 t - \operatorname{sen} \cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$k_1'(t) = -1 \quad \Rightarrow \quad k_1(t) = -t + c_1, \qquad k_2'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2(t) = c_2.$$

Luego, todas las soluciones son:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t + c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-\cos t - \operatorname{sen} t)(-t + c_1) + (-\operatorname{sen} t + \cos t) \cdot c_2 \\ \cos t\,(-t + c_1) + (\operatorname{sen} t) c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.