CLASE 21. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Sistemas de ecuaciones diferenciales

1.1. Sistemas lineales. Supongamos que tenemos un ecosistema con dos poblaciones x, y que no interactúan entre ellas de manera que:

$$\begin{cases} x' = 3x & x(0) = 30 \\ y' = -2y & y(0) = 50. \end{cases}$$

Entonces sabemos que

$$x(t) = 30e^{3t}, \qquad y(t) = 50e^{-2t}.$$

Matricialmente, se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Observación: se suele usar la notación

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ \dot{y}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'(t).$$

Podemos usar notación simplificada del sistema y escribir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En general vamos a estudiar sistemas lineales, que son los que tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Si A es una matriz diagonal, vimos que es fácil resolverse.

Supongamos que ahora tenemos un ecosistema de dos especies cuyas poblaciones evolucionan en el tiempo según el sistema lineal:

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{2}{3}x(t) - \frac{2}{3}y(t) \\ y'(t) = \frac{2}{3}x(t) - \frac{7}{3}y(t) \end{cases}$$

y que inicialmente se tiene $x(0) = 70$, $y(0) = 50$.

Matricialmente podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Intentemos diagonalizar a le matriz A: el polinomio característico es

$$X_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & \lambda + 7/3 \end{pmatrix} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\right)\left(\lambda + \frac{7}{3}\right) + \frac{4}{9} = \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{7}{3}\lambda + \frac{14}{9} + \frac{4}{9} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

entonces

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -2 \quad \text{ó} \quad \lambda = -1.$$

Obtuvimos autovalores -2 y -1.

Si $\lambda = -2$

$$-2I - A = \begin{pmatrix} -4/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad v_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{autovector}$$

Si $\lambda = -1$

$$-I - A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \qquad v_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{autovector.}$$

Por lo tanto $A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Entonces, usando que $A = PDP^{-1}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = PDP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{multiplico por } P^{-1}} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = DP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Miremos $P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'$, que es la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3x'(t) + 2/3y'(t) \\ 2/3x'(t) - 1/3y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{pmatrix}'(t) = \left[\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]'(t).$$

Entonces, reemplazando en (1.1) nos queda

$$\left(P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)' = D \cdot \left(P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

donde D es diagonal.

Si llamamos

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{o equivalentemente} \qquad P \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nos queda:

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}' = D \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

que es un sistema que sabemos resolver al ser D diagonal. Entonces obtenemos

$$z(t) = k_1 e^{-2t}, \qquad \omega(t) = k_2 e^{-t}$$

Para recuperar x e y usamos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{-2t} \\ k_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{-2t} + 2k_2 e^{-t} \\ 2k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{autovec de } -2} + k_2 e^{-1t} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{autovec de } -1}$$

que también se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Observación: notar que $e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es una solución de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Veamos eso:

$$\text{si} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 2 \cdot e^{-2t} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ -4e^{-2t} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-2t} \cdot (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ -4e^{-2t} \end{pmatrix}$$

donde usamos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es autovector de autovalor -2.

De la misma manera $e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Entonces podemos decir que **todas** las soluciones de este sistema son combinación lineal de las dos soluciones dadas por

$$e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es autovector asociado al autovalor -2 y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a autovector asociado al autovalor -1.

Es decir, estas dos soluciones generan todas las posibles soluciones que se escriben como:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto encontramos todas las solucione de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si ahora queremos la única que satisface $x(0) = 70, y(0) = 50$, usamos que

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = k_1 e^{-2\cdot 0}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 e^{-1\cdot 0}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema $k_1 = 10$ y $k_2 = 30$. Por lo tanto, la única solución de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 10e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 30e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Resultado general. En general vale lo siguiente. Dado un sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si A es diagonalizable en $\mathbb{R}$, es decir existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ autovalores, y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\omega = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ autovectores asociados a λ, μ respectivamente, entonces

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

son ambas soluciones del sistema. Además, estas dos soluciones generan todas las posibles soluciones del sistema de manera que cualquier solución se escribe como combinación lineal de $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{\lambda t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + k_1 e^{\mu t}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ son todas las posibles soluciones del sistema.

Esto se puede reescribir así:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(e^{\lambda t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \middle| e^{\mu t}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Nota: usamos en esta clase varias veces que si

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & | & b \\ c & | & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak_1 + ck_2 \\ bk_1 + dk_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak_1 \\ bk_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ck_2 \\ dk_2 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Es decir multiplicar una matriz por un vector a derecha consiste en hacer una combinación lineal de las columnas de la matriz.

1.3. ¿Qué hacemos si la matriz A no se diagonaliza en $\mathbb{R}$ pero si en $\mathbb{C}$? Recordar que x e y representan individuos de poblaciones:

Importante: Buscamos soluciones $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ con $x(t) \in \mathbb{R}, y(t) \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Me piden encontrar todas las soluciones de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Diagonalizamos a la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$X_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)+2 = \lambda^2+1 = 0$$

sí y sólo si $\lambda = \pm i$. Nos da entonces autovalores i y $-i$.

Para $\lambda = i$

$$iI - A = \begin{pmatrix} i+1 & 2 \\ -1 & i-1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F_2+(1+i)F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} -1 & i-1 \\ i+1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & i-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces un autovector es: $(i-1, 1)$.

Esto nos dice que $\overline{(i-1,1)}$ es autovector asociado al autovalor $-i$, es decir $(-i-1,1)$ es autovector asociado a $-i$. Igual que antes vamos a tener que

$$e^{it} \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad e^{-it} \begin{pmatrix} -i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son ambas soluciones de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Recordar $e^{it} = \cos(t) + i\operatorname{sen}(t)$, entonces $e^{-it} = \cos(-t) + i\operatorname{sen}(-t) = \cos(t) - i\operatorname{sen}(t)$.

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = (-\operatorname{sen} t + i\cos t) \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y por otro lado tenemos que tenemos que $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se puede escribir como sigue

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\cos t + i\operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} &= (\cos t + i\operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (\cos t + i\operatorname{sen} t) \cdot \begin{pmatrix} -(i-1)-2 \\ i-1+1 \end{pmatrix} \\
&= (\cos t + i\operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} -i-1 \\ i \end{pmatrix} \\
&= (\cos t + i\operatorname{sen} t) i \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= ((\cos t)i + \underbrace{i^2}_{-1} \operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (-\operatorname{sen} t + i\cos t) \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lo mismo pasa con:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-it} \begin{pmatrix} -i-1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos t - i\operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} -i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es solución.

Pero buscamos soluciones reales!!

Entonces esas soluciones no nos sirven.

Observar lo siguiente: Dado $z = a + bi \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Lo mismo pasa con vectores, entonces si hacemos

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \overline{e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\left(e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} - \overline{e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

van a ser funciones reales. Y además, van a ser también soluciones de

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Esto último es porque si

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ w_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} z_2(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

son dos soluciones entonces: $k\begin{pmatrix} z_1(t) \\ w_1(t) \end{pmatrix}$ es también una solución ($k \in \mathbb{C}$ constante), y

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \omega_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

es también una solución.

De todo esto vemos que

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \overline{e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\left(e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} - \overline{e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

son soluciones reales de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Una opción es hacen todas esas cuentas para obtener

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

pero lo más fácil es acordarse que son la parte real e imaginaría de cualquiera de las soluciones complejas que encontramos (da lo mismo si uso una solución compleja o la otra). Escribo alguna de las soluciones complejas:

$$\begin{aligned} e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} &= (\cos t + i \operatorname{sen} t)\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\cos t + i \operatorname{sen} t)\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \cos t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\left(\sin t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

donde la parte azul es la parte real, y la roja la parte imaginaria.

Acá tenemos las dos soluciones reales que buscábamos:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \operatorname{Re}\left(e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \cos t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \operatorname{Im}\left(e^{it}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \sin t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Estas dos soluciones *generan* todas los posibles soluciones reales de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Todas los posibles soluciones son:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t + \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, lo cual podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

1.4. Resumen.

Dado un sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(1) Si A se diagonaliza en $\mathbb{R}$, sean μ y λ autovalores y $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ antovectores asociados a μ y λ respectivamente. Entonces

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{dt} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

son ambas soluciones (reales) de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, es decir

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

y todas las soluciones son

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{\mu t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + k_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, que también se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(\underbrace{e^{\mu t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\begin{matrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{matrix}} \middle| \underbrace{e^{\lambda t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}_{\begin{matrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{matrix}} \right) \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

donde $S(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$ se la llama matriz fundamental de soluciones.

(2) Si A no se diagonaliza en $\mathbb{R}$ pero sí se diagonaliza en $\mathbb{C}$, sean λ y $\bar{\lambda}$ los autovalores y $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{v_1} \\ \bar{v_2} \end{pmatrix}$ los respectivos autovectores.

Elijo un λ con $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ su autovector asociado. Escribimos

$$\lambda = a + bi, \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= e^{(a+bi)t} \left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{at} e^{bit} \left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{at} (\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt)) \left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{at} \left[\cos(bt) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \operatorname{sen}(bt) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + i e^{at} \left[\operatorname{sen}(bt) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \cos(bt) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

donde la parte azul es la parte real de $e^{dt}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ y la parte roja es la parte imaginaria de ese vector.

Entonces
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{at}\cdot\left[\cos(bt)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \operatorname{sen}(bt)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right]$$
y
$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{at}\left[\operatorname{sen}(bt)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \cos(bt)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right]$$
son ambas soluciones reales de
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
y todas las soluciones reales son
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= k_1e^{at}\cdot\left[\cos(bt)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \operatorname{sen}(bt)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right] + k_2e^{at}\left[\operatorname{sen}(bt)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \cos(bt)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right]\\ &= k_1\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$
con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, que también se puede escribir como sigue:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$
donde ahora
$$S(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$$
es la matiz fundamental de soluciones.