CLASE 20. ECUACIÓN LOGÍSTICA. EQUILIBRIOS ESTABLES E INESTABLES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Ecuación logística

Volvemos ahora a ecuaciones no necesariamente lineales de primer orden.

Vimos que si:

r es tasa de crecimiento instantáneo de una población per capita

$N(t) =$ individuos de un a población en tiempo t.

entonces

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad N'(t) = rN(t)$$

y vimos que las soluciones son

$$N(t) = k \cdot e^{rt} \quad k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

Si $N(0) = N_0$ nos queda

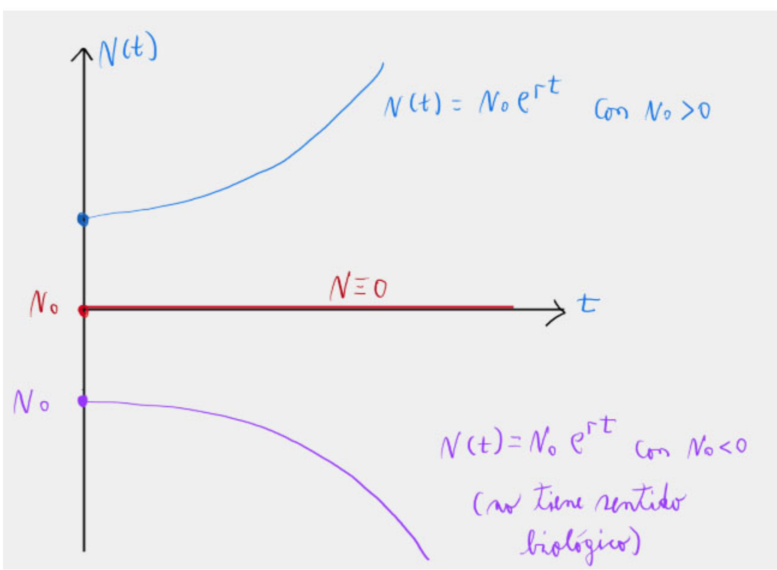
$$N(0) = ke^{r \cdot 0} = k \qquad \Rightarrow \qquad k = N_0$$

entonces las soluciones son:

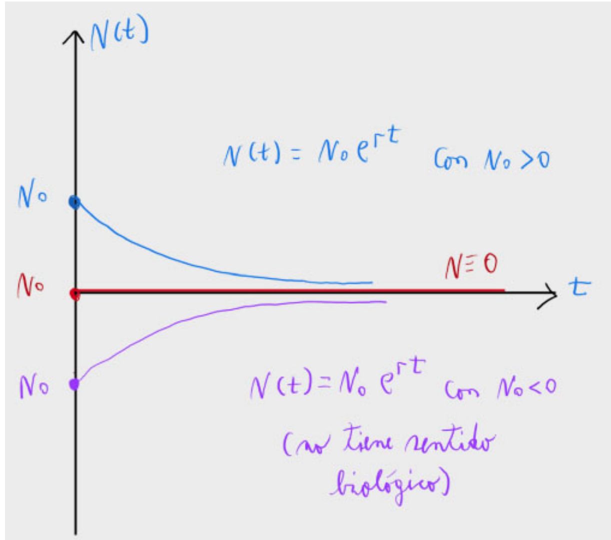
$$N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$$

Notemos que si $N_0 = 0 \Rightarrow N(t) \equiv 0$.

Gráficamente (suponemos $r > 0$)



y si $r < 0$ (la cantidad de individuos decrece)



Observación: Notar que dos soluciones con datos iniciales distintos no se cruzan.

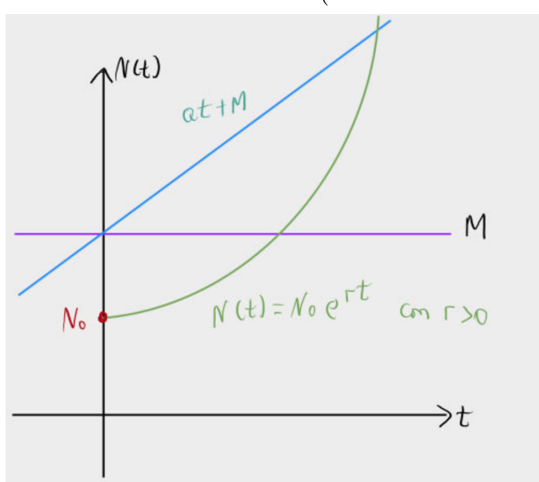
En cualquier caso $N(t) \equiv 0$ es una solución de $N'(t) = rN(t)$, $r \neq 0$ ¿Hay otras soluciones constantes de este ecuación?

Si $N(t) \equiv k$ es una función constante, si fuera solución de $N' = rN$, como $N(t) \equiv k$, entonces $N'(t) \equiv 0$. Debería sen $N'(t) = 0 = r \cdot k = N(t)$, y como $r \neq 0$, debe ser $k = 0$. Es decir, si $N(t) \equiv k$ es una solución constante de $N' = rN$, debe ser $k = 0$, es decir $N(t) = 0$ es la única solución constante de $N' = rN$.

Este modelo de crecimiento exponencial fue propuesto por Malthus en 1798.

¿Es razonable este modelo?

Este modelo no considera que los recursos son limitados. (o incluso si crecen linealmente).



Verhulst en 1838 propone un modelo que tenga en cuenta los recursos. Propone una ecuación diferencial que:

- Si N es chico (cuando todavía tengo recursos suficientes) se parece a la exponencial con tasa r).
- Si N se acerca a cierto valor (capacidad de carga del sistema donde los recursos no alcanzan) el crecimiento se hace lento.
- Si N pasa de esa capacidad de carga, la tasa de crecimiento es negativa de manera que la cantidad de individuos decrece.

Es decir: ($\sim$ quiere decir "se parece a")

- $\frac{N'}{N} \sim r$ si N es chico
- $\frac{N'}{N} \sim 0$ si $N \sim K =$ capacidad de carga.

- $\frac{N'}{N} < 0 \quad$ si $N > K$

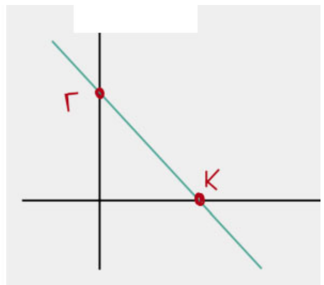
esto lo podemos escribir como

$$\frac{N'}{N} = g(N)$$

con

$$g(N) \sim r \text{ si } N \text{ chico}$$
$$g(N) \sim 0 \text{ si } N \sim K$$
$$g(N) < 0 \text{ si } N > K$$

Si $g(N)$ es lineal, sirve algo así:



donde la pendiente de la recta es $-\frac{r}{k}$ y $g(0) = r$. Esto da que

$$g(N) = -\frac{r}{k} \cdot N + r = r\left(1 - \frac{N}{k}\right).$$

Verhulst propone eso mismo:

$$\frac{N'}{N} = r\left(1 - \frac{N}{k}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad N' = r \cdot N\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

Para resolver hacemos separación de variables; lo hacemos para $r = 2$ y $k = 10$.

$$N' = 2N\left(1 - \frac{N}{10}\right)$$

entonces (si $N \neq 0$, $N \neq 10$)

$$\int \frac{dN}{dt} = 2N\left(1 - \frac{N}{10}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{10}\right)} dN = \int 2\, dt$$

Necesitamos entonces calcular

$$\int \frac{1}{N(1 - \frac{N}{10})}\, dN.$$

Para ello usamos fracciones simples. Reescribimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N\left(1-\frac{N}{10}\right)} &= \frac{A}{N} + \frac{B}{1-\frac{N}{10}} \\ &= \frac{A\left(1-\frac{N}{10}\right)+BN}{N\left(1-\frac{N}{10}\right)} \\ &= \frac{A+\left(B-\frac{A}{10}\right)N}{N\left(1-\frac{N}{10}\right)} \end{aligned}$$

entonces $A = 1$ y $B - \frac{A}{10} = 0$, lo que da $B = \frac{1}{10}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{10}\right)} dN &= \int \frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{N}{10}} dN \\ &= \ln|N| + \frac{1}{10} \ln\left|1 - \frac{N}{10}\right| \cdot (-10) \\ &= \ln|N| - \ln\left|1 - \frac{N}{10}\right| \\ &= \ln\left|\frac{N}{1 - \frac{N}{10}}\right|. \end{aligned}$$

Par otro lado:

$$\int 2dt = 2t$$

Queda entonces

$$\ln\left|\frac{N}{1-\frac{N}{10}}\right| = 2t + c \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{N}{1-\frac{N}{10}}\right| = e^{2t+c} = e^{2t}\cdot e^{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{N}{1-\frac{N}{10}} = k\cdot e^{2t} \text{ con } k\in\mathbb{R},$$

(esta expresión incluye $N \equiv 0$ pero no incluye a $N = 10$).

Si saco $N = 0$ de las soluciones (para pasarlo dividiendo) entonces estoy pensando $k \neq 0$ y doy vuelta todo

$$\frac{1-\frac{N}{10}}{N} = \frac{1}{k}\cdot e^{-2t}, \text{ si } \quad k\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{N} - \frac{1}{10} = \frac{1}{k}e^{-2t} \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{1}{\frac{1}{10} + ce^{-2t}}$$

(a $\frac{1}{k}$ lo llamo c, que es una constante cualquier, por ahora $c \neq 0$).

Vemos que si $c = 0$ estoy agregando la solución $N \equiv 10$.

Juntando todo, todas las soluciones son

$$N = \frac{1}{\frac{1}{10} + ce^{-2t}} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ (incluye } c = 0),$$

ó

$$N(t) \equiv 0.$$

Si $N(0) = 5$ (es decir, una condición inicial) entonces $5 = N(0) = \frac{1}{\frac{1}{10}+c}$, entonces $5 = \frac{1}{\frac{1}{10}+c}$ entonces $\frac{1}{10} + c = \frac{1}{5}$, y esto da $c = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$.

Finalmente,

$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}e^{-2t}} = \frac{1}{\frac{1}{10}\left(1 + e^{-2t}\right)} = \frac{10}{1 + e^{-2t}}.$$

En general si $N(0) = N_0$ (condición inicial), tenemos

$$\frac{1}{10 + C} = N_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{N_0} = \frac{1}{10} + C \quad\Longrightarrow\quad C = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{10} = \frac{10 - N_0}{10N_0}$$

lo que da

$$N(t) = \frac{1}{10 + \frac{10-N_0}{10N_0}\cdot e^{-2t}} = \frac{10N_0}{N_0 + (10 - N_0)e^{-2t}}.$$

Si $N_0 = 0$, nos queda $N(t) \equiv 0$

Si $N_0 = 10$ nos queda $N(t) \equiv 10$.

Notar que si $N_0 \neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{10N_0}{N_0 + (10 - N_0)e^{-2t}} = 10$$

2. Análisis asintótico

Hemos resuelto $N'(t) = 2N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{10}\right)$ y nos quedaron las soluciones:

$$N = \frac{1}{\frac{1}{10} + ce^{-2t}} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ (incluye } c = 0),$$

ó

$$N(t) \equiv 0,$$

y si consideramos un dato inicial general $N(0) = N_0$ llegamos a que:

$$N(t) = \frac{1}{10 + \frac{10-N_0}{10N_0}\cdot e^{-2t}} = \frac{10N_0}{N_0 + (10 - N_0)e^{-2t}}.$$

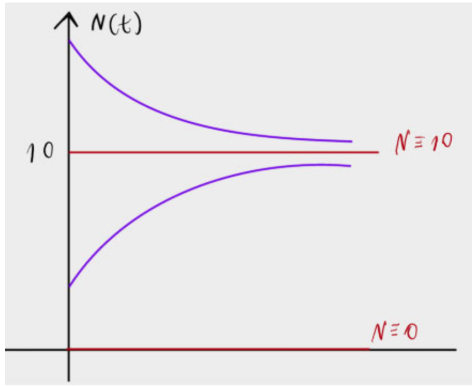
Si $N_0 = 0$, nos queda $N(t) \equiv 0$.

Si$N_0 = 10$ nos quede $N(t) \equiv 10$.

Notar que si $N_0 \neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{10N_0}{N_0 + (10 - N_0)e^{-2t}} = 10.$$

Gráficamente:



Notar que si $N_0 < 0$ cambia el dominio!

Analizamos $N' = \underbrace{2N\left(1 - \frac{N}{10}\right)}_{F(N)}$, donde $F(N)$ no depende explícitamente de t.

Buscamos soluciones constantes $N(t) \equiv c$.

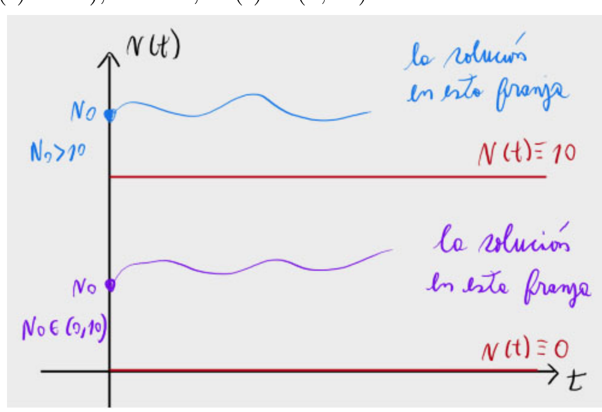
Si $N(t) \equiv c$ es una solución de $N' = 2N\left(1 - \frac{N}{10}\right)$, entonces debe pasar:

$$\underbrace{0}_{N(t)'=c'} = 2 \cdot \underbrace{c}_{N} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{c}{10}}_{N}\right) \quad \Longrightarrow \quad c = 0 \quad \text{ó} \quad c = 10.$$

Entonces los únicas soluciones constantes son $N(t) \equiv 0$ ó $N(t) \equiv 10$.

Además, sabemos que dos soluciones distintas de $N' = 2N\left(1 - \frac{N}{10}\right)$ no pueden cruzarse.

Esto nos dice que una solución de $N' = 2N\left(1 - \frac{N}{10}\right)$ con $N(0) = N_0 \in (0, 10)$, se queda en esa franja (porque no puede cruzar $N(t) \equiv 0$ ni a $N(t) \equiv 10$), esto es, $N(t) \in (0, 10)$.



Lo mismo pasa si $N_0 > 10$, la solución no puede salir de $N > 10$, es decir $N(t) > 10$.

También pasa esto si $N_0 < 0$, la solución se quede en $N(t) < 0$ (aunque no tiene sentido biológico).

Miramos de nuevo lo ecuación diferencial $N' = 2N\left(1 - \frac{N}{10}\right)$ con:

a) $N(0) = N_0 > 10$, sabemos que la solución es $N(t) > 10$ para todo t donde esté definida. Entonces

$$N'(t) = 2\underbrace{N(t)}_{>0}\underbrace{\left(1 - \frac{N(t)}{10}\right)}_{<0} \quad \Longrightarrow \quad N'(t) < 0 \quad \Longrightarrow \quad N \text{ decrece .}$$

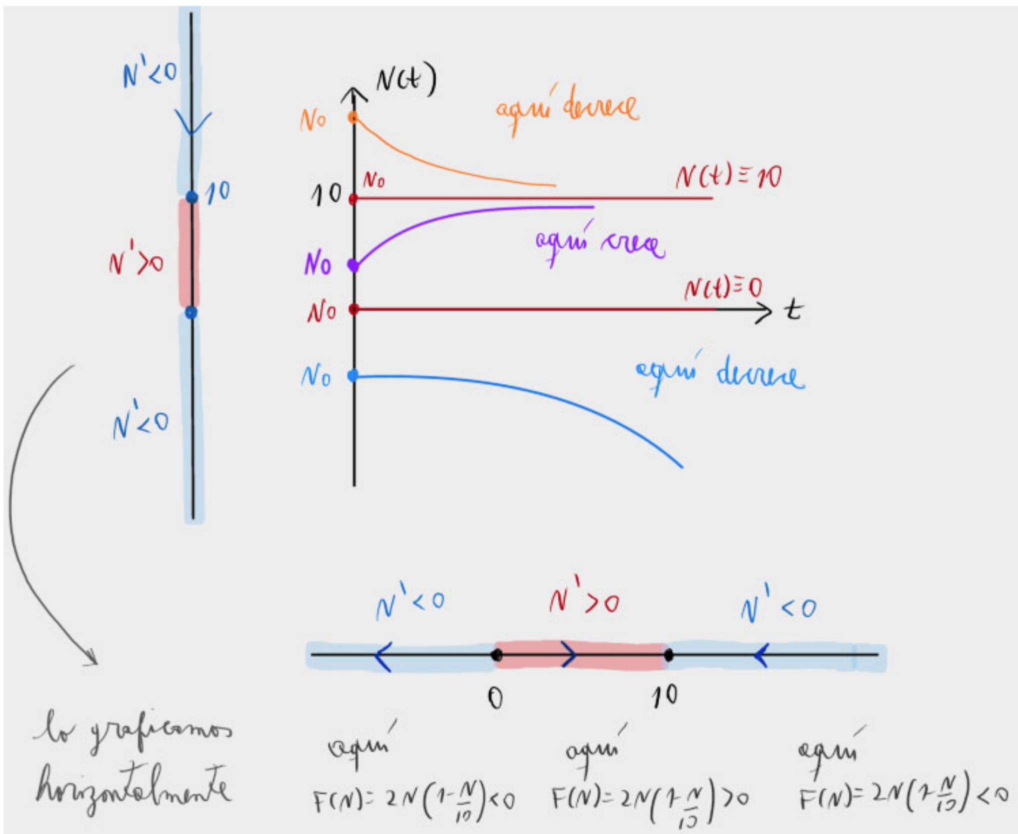
b) $N(0) = N_0 \in (0, 10)$, sabemos que la solución $N(t) \in (0, 10)$ para todo t donde esté definida. Entonces

$$N'(t) = 2\underbrace{N(t)}_{>0}\underbrace{\left(1 - \frac{N(t)}{10}\right)}_{>0} \quad \Longrightarrow \quad N'(t) > 0 \quad \Longrightarrow \quad N \text{ crece.}$$

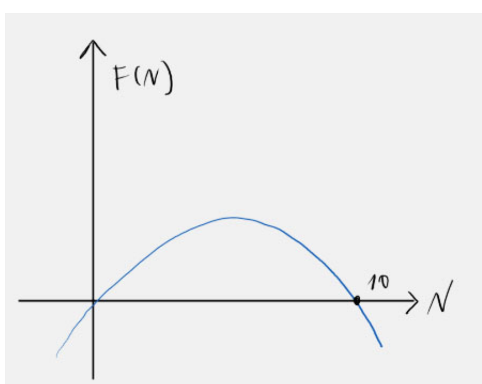
c) $N(D) = N_0 < 0$, sabemos que la solución es $N(t) < 0$ para todo t donde este definida. Entonces

$$N'(t) = \underbrace{2N(t)}_{<0}\underbrace{(1 - \frac{N(t)}{10})}_{>0} \quad \Longrightarrow \quad N'(t) < 0 \quad \Longrightarrow \quad N \text{ derece.}$$

Con el análisis que hicimos podemos mejorar el gráfico y vemos que:



De hecho, si graficamos $F(N)$ en función de N, obtenemos



donde $F(N) = 2N\left(1 - \frac{N}{10}\right)$ es una parábola negativa con raíces $N = 0$ y $N = 10$.

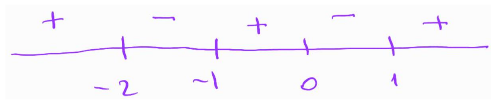
3. Método general para hacer el análisis asintótico

Consideramos $x'(t) = F(x(t))$ (ó $x' = F(x)$) una ecuación ordinaria de orden 1 autónoma (esto quiere decir que F no depende explícitamente de t).

Por ejemplo: $x' = \underbrace{x\left(x^2-1\right)(x+2)}_{F(x)}$.

(1) Miro $F(x)$ como función de x y busco ceros de F y conjuntos de positividad y negatividad.

Por ejemplo: si $F(x) = x\left(x^2-1\right)(x+2)$, los ceros son $x=0$, $x=\pm 1$ y $x=-2$. Los conjuntos de positividad y negatividad son:



(2) Uso que los ceros de F son las soluciones constantes de $x' = F(x)$, ya que si $x(t) \equiv c$ fuera solución, debe ser

$$\underbrace{0}_{x'(t)} = \underbrace{F(c)}_{x(t)}$$

A los ceros de F (que son las soluciones constantes de $x' = F(x)$) se los llama puntos de equilibrio.

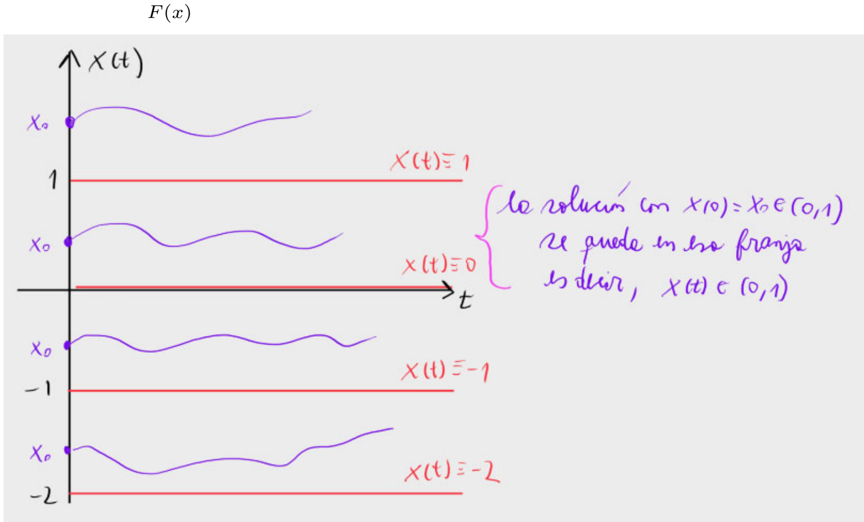
Por ejemplo: si $x' = \underbrace{x\left(x^2-1\right)(x+2)}_{F(x)}$, $-2,-1,0,1$ son puntos de equilibrio y

$$\left.\begin{array}{l} x(t)\equiv -2 \\ x(t)\equiv -1 \\ x(t)\equiv 0 \\ x(t)\equiv 1 \end{array}\right\} \quad \text{son cada una una solución constante de } x'(t) = F(x(t))$$

(3) Por unicidad de solución, los puntos de equilibrio separan el plano en partes donde se mueven el resto de las soluciones.

Es decir, si $x(t)$ es la solución de $x' = F(x)$ con $x(0) = x_0$ y x_0 no es punto de equilibrio, entonces $x(t)$ no cruza ninguna de las soluciones constantes.

Por ejemplo: si $x' = \underbrace{x\left(x^2-1\right)(x+2)}_{F(x)}$, tenemos

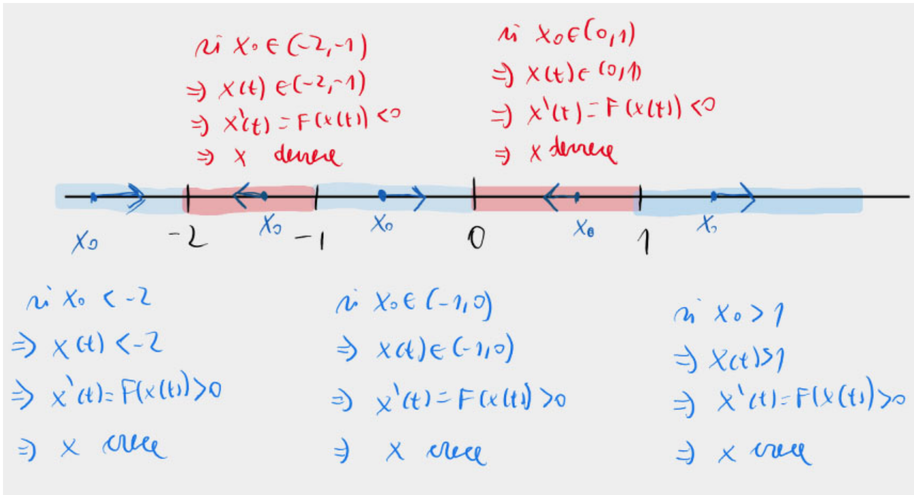


(4) Usando (3) y mirando el signo de $F(x)$ podemos analizar si x crece o decrece para cada dato inicial $x(0) = x_0$ con x_0 que no es equilibrio.

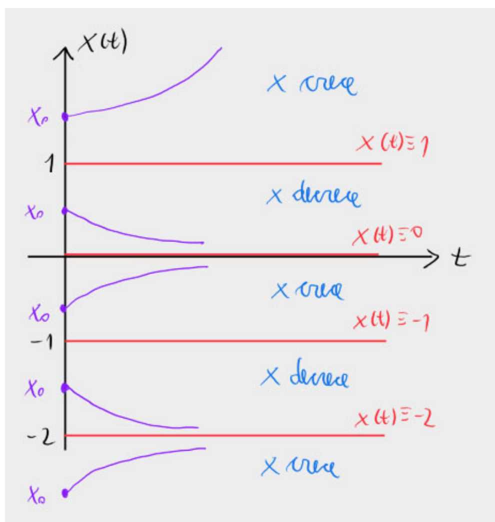
Si x_0 es tal que $F(x_0) > 0$, entonces la solución $x(t)$ de $X' = F(x)$ con $x(0) = x_0$ satisface que $F(x(t)) > 0$. Por lo tanto, $x'(\theta) = f(x(t))$ nos dice que x crece.

Lo mismo si x_0 os tal que $F(x_0) < 0$, en este caso nos dirá que $x(t)$, la solución de $x' = F(x)$ con $x(0) = x_0$ satisface que x decrece.

Por ejemplo: si $x' = \underbrace{x\left(x^2-1\right)(x+2)}_{F(x)}$, tenemos



En el plano



(5) Siempre se puede probar que si la solución $x(t)$ está acotada, es decir $x(t)$ se mantiene siempre en un intervalo, entonces existe

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)$$

y este límite es un punto de equilibrio.

Por ejemplo: si $x' = \underbrace{x\left(x^2-1\right)(x+2)}_{F(x)}$, tenemos que:

Si $x_0 \in (-\infty,-2)$, como la solución $x(t)$ crece, no puede cruzar $x_{-2}(t) \equiv -2$, entonces $x_0 = x(0) < x(t) < -2$, luego existe el $\lim_{t\to\infty} x(t)$ y este limite debe ser $\lim_{t\to\infty} x(t) = -2$.

Si $x_0 \in (-2,-1)$, sabemos que la solución $x(t)$ no puede cruzar las soluciones constantes $x_{-2}(t) \equiv -2$ ni $x_{-1}(t) \equiv -1$, entonces $x(t) \in (-2,-1)$, luego existe $\lim_{t\to\infty} x(t)$ y como $x(t)$ decrece, tendremos que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = -2$.

Se la misma manera se prueba que:

Si $x_0 \in (-1,0)$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Si $x_0 \in (0,1)$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Y si $x_0 > 1$, no sabemos porque acá no sabernos si la solución $x(t)$ está acotada.

En este caso, mirando los diagramas y los limites, podemos decir que -2 y 0 son equilibrios estables ya que las soluciones con datos iniciales "cercanos.ª cada uno, tienden a ese equilibrio. Más concretamente:

-2 es un equilibrio estable porque si considero una solución con dato inicial $x_0 \in (-\infty, -1)$ que es un intervalo que contiene a -2, sabemos que $\underbrace{x_{x_0}(t)}_{\text{sol de } x' = F(x), x(0) = x_0} \to -2$.

0 es un equilibrio estable porque si considero una solución con dato inicial $x_0 \in (-1, 1)$ que es un intervalo que contiene a 0, sabemos que $\underbrace{x_{x_0}(t)}_{\text{sol de } x' = F(x), x(0) = x_0} \to 0$.

Por otro lado -1 y 1 son equilibrios inestables ya que no hay ningún intervalo en donde se satisfaga lo anterior, es decir no son estables.

Definición: : Dado x un equilibrio de $x' = F(x)$ (es decir $F(c) = 0$), se dice que c es un *equilibrio estable* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x_0 \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, la única solución de $x' = F(x)$ con $x(0) = x_0$ satisface que

$$\lim_{t \to} x(t) = c.$$

Si c no es un equilibrio estable se dice que es un *equilibrio inestable*.