CLASE 19. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Ecuaciones lineales de primer orden

Vimos hasta aquí ecuaciones de primer orden de la forma $x'(t) = F(t, x(t))$.

En esta clase estudiaremos un subgrupo particular de este tipo de ecuaciones, que se llaman ecuaciones lineales de primer orden y son las que tienen la forma:

$$x'(t) = P(t)x(t) + Q(t).$$

Este caso corresponde con tomar $F(t, x) = xP(t) + Q(t)$. Aquí se ve porqué es lineal, ya que depende linealmente de x.

Ejemplo: :

a) $x'(t) = -3x(t)$ donde $P(t) = -3$, $Q(t) \equiv 0$

b) $x'(t) = -3x(t) + 9t$, donde $P(t) = -3$, $Q(t) = 9t$

c) $x'(t) = -3t^2x(t)$, donde $P(t) = -3t^2$, $Q(t) \equiv 0$

d) $x'(t) = -3t^2x(t) + 6t^5$, donde $P(t) = -3t^2$, $Q(t) = 6t^5$.

A las ecuaciones lineales de primer orden se las clasifica en:

1) Homogéneas si $Q(t) \equiv 0$ (Ej 1 y 3)

No homogéneas si $Q(t) \neq 0$ (Ej 2 y 4).

2) A coeficientes constantes si $P(t)$ es constante (Ej 1 y 2)

Además, dada $x'(t) = P(t)x(t) + Q(t)$ con $Q(t) \neq 0$, a la ecuación $X'(t) = P(t)x(t)$ se la llama ecuación lineal homogénea asociada a la ecuación lineal no homogénea $x' = P(t)x + Q(t)$.

En los ejemplos, el Ej a) es la ecuación lineal homogénea asociada al Ej b). El Ej c) es la ecuación lineal homogénea asociada al Ej d).

Las ecuaciones lineales de primer orden siempre se pueden resolver de la siguiente manera: (veamos con los ejemplos).

Ejemplo: $x' = -3x$.

Hacemos separación de variables:

$$\frac{dx}{dt} = -3x \quad \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{x}dx = -3dt \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = -3t + c \quad \Rightarrow \quad |x| = e^{-3t+c} = e^{-3t} \cdot e^c$$

Entonces

$$x(t) = ke^{-3t}, \qquad k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

Notar de lo anterior que una solución $x(t)$ de $x' = -3x$, satisface que $x(t)e^{3t} = k$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y derivando (por la regla del producto)

$$\underbrace{x'(t)e^{3t} + x(t)3e^{3t}}_{e^{3t}(x'(t)+3x(t))} = 0$$

Como $e^{3t} > 0$ para todo t, recuperamos la ecuación diferencial $x' + 3x = 0$.

Usemos estos ideas para resolver el siguiente ejercicio.

Ejemplo: : $x' = -3x + 9t$. En este caso

$$x'(t) + 3x(t) = 9t.$$

Multiplicamos por e^{3t} a ambos lados

$$\underbrace{(x'(t)+3x(t))\,e^{3t}}_{=(x(t)e^{3t})'} = 9te^{3t}$$

Entonces las primitivas de estas dos funciones difieren en una constante:

La primitiva de $\left(x(t)e^{3t}\right)'$ es $x(t)e^{3t}$.

La primitiva de $9te^{3t}$:

$$\int 9te^{3t}\,dt = 9\int \underbrace{t}_{f}\underbrace{e^{3t}}_{g'}\,dt = 9\left[t\frac{e^{3t}}{3} - \int \frac{e^{3t}}{3}\,dt\right] = 9\left[t\frac{e^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9}\right] = e^{3t}(3t-1).$$

Entonces

$$x(t)e^{3t} = e^{3t}(3t-1)+k \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = e^{-3t}\left(e^{3t}(3t-1)+k\right) = 3t-1+ke^{-3t}.$$

Verificamos que efectivamente $x(t) = 3t-1+ke^{-3t}$ es solución derivándola y viendo que satisface la ecuación.

Dos comentarios sobe lo que hicimos. Obtuvimos al final lo siguiente:

$$x(t) = e^{-3t}\left(e^{3t}(3t-1)+k\right) = 3t-1+ke^{-3t}.$$

De la primera escritura podemos ver que

$$x(t) = e^{-3t}\cdot\left(e^{3t}(3t-1)+k\right)$$

se parece a la escritura de los soluciones del homogéneo que eran

$$x(t) = e^{-3t}\cdot k \qquad \text{con } k \text{ constante}$$

donde ahora tenemos

$$x(t) = e^{-3t}\cdot\underbrace{\left(e^{3t}(3t-1)+k\right)}_{k(t)}$$

donde aquí $k(t)$ ya no es constante sino que es una función que dependen de t.

Por otro lado, de la segunda escritura $x(t) = 3t-1+ke^{-3t}$ podemos verlo así:

$$x(t) = \underbrace{3t-1}_{\text{una sol. particular del no homogeneo}} + \underbrace{ke^{-3t}}_{\text{sol. del homogeneo}}$$

1.1. Técnica para resolver ecuaciones lineales de primer orden no homogéneas. Usamos la idea de la primera escritura: variación de las constantes.

(1º) Resolvemos la ecuación lineal homogénea asociada:

$$x' = -3x \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = ke^{-3t} \qquad \text{con } k\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$$

(2º) Ahora buscamos una función $k(t)$ que depende de t de manera que $x(t) = k(t)e^{-3t}$ sea una solución de la ecuación no homogénea

$$\to x' = -3x+9t.$$

Entonces si $x(t) = k(t)e^{-3t}$ debe ser solución, se debe verificar que

$$\left(k(t)e^{-3t}\right)' = -3\cdot\left(k(t)e^{-3t}\right)+9t$$

Hacemos esta cuenta:

$$k'(t)e^{-3t}+k(t)(-3)e^{-3t} = -3k(t)e^{-3t}+9t$$

Entonces $k'(t)e^{-3t} = 9t \quad \Rightarrow \quad k(t) = e^{3t}9t$.

Calculamos ahora todas los primitivas (esta primitiva ya la calculamos arriba)

$$k(t) = e^{3t}(3t-1)+k$$

ahora k es de nuevo una constante de verdad.

Entonces, hemos encontramos todas las funciones $k(t)$, que dependen de t, que hacen que $x(t) = e^{-3t}k(t)$ sean solución de $x' = -3x+9t$.

Es decir, las soluciones buscadas son

$$x(t) = e^{-3t}\left(e^{3t}(3t-1)+k\right)$$

con $k\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$.

Resolvamos ahora los ejercicios anterior de esta forma.

Ejemplo: $x' = -3t^2x$. Haciendo separación de variables

$$\frac{dx}{dt} = -3t^2x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x}dx = -3t^2dt \quad \Longrightarrow \quad \ln|x| = -t^3 + c \quad \Longrightarrow \quad |x| = e^{-t^3+c} = e^{-t^3}e^c.$$

Entonces

$$x(t) = \underbrace{ke^{-t^3}}_{\text{son todas las sol. buscadas}}, \qquad k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $x' = -3t^2x + 6t^5$.

Primero resolvemos el homogéneo $x' = -3t^2x$ (es el ejercicio anterior) y nos queda

$$x(t) = ke^{-t^3}$$

son todas las soluciones, con $k \in \mathbb{R}$.

Ahora buscamos $k(t)$ (la constante k de antes, pero ahora la pensamos como $k(t)$ que es función de t como variable) de manera que

$$x(t) = k(t)e^{-t^3}$$

sea solución de $x' = -3t^2x + 6t^5$. Entonces

$$(k(t)e^{-t^3})' = -3t^2(k(t)e^{-t^3}) + 6t^5$$

y por lo tanto

$$k'(t)e^{-t^3} + k(t)e^{-t^3}(-3t^2) = -3t^2\left(k(t)e^{-t^3}\right) + 6t^5$$

lo que da

$$k'(t)e^{-t^3} = 6t^5$$

entonces

$$k'(t) = e^{t^3}6t^5$$

Integrando

$$\begin{aligned} k(t) = \int e^{t^3}6t^5dt &= 6\int e^{t^3}t^5\,dt \\ &= 6\int e^{\tau}\frac{\tau}{3}d\tau = 2\int e^{\tau}\tau\,d\tau \quad (\text{sustitución}\, u = t^3) \\ &= 2\left[\tau \cdot e^{\tau} - \int e^{\tau}d\tau\right] \quad (\text{partes}\, u = \tau, v = e^{\tau}) \\ &= 2(\tau e^{\tau} - e^{\tau} + c) \\ &= 2e^{\tau}(\tau - 1) + c \qquad (c \text{ puede ir cambiando de linea a linea}) \\ &= 2e^{t^3}(t^3 - 1) + c \end{aligned}$$

Entonces

$$k(t) = 2e^{t^3}(t^3 - 1) + c$$

Chequeamos: derivando,

$$k'(t) = 6e^{\frac{t^3}{3}}t^5.$$

Entonces, las soluciones de $x' = -3t^2x + 6t^5$ son

$$x(t) = k(t)e^{-t^3} = e^{-t^3}(2e^{t^3}(t^3 - 1) + c)$$

1.2. Escritura general del método de variación de los parámetros. Queremos resolver $x'(t) = P(t)x(t) + Q(t)$ con $Q(t) \neq 0$.

(1) Buscamos solución del homogéneo asociado $x' = P(t)x$.

Esto lo resolvemos con separación de variables:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx = P(t)dt$$

lo que da

$$\ln|x| = H(t) + C$$

donde H es una primitiva de $P(t)$, esto es, $H'(t) = P(t)$. Entonces

$$|x| = e^{H(t)+C} = e^{H(t)}e^{c}$$

y así llegamos a

$$x(t) = k \cdot e^{H(t)}, \qquad k \in \mathbb{R}, t \in I,$$

donde I depende de $P(t)$.

(2) Hacemos variación de los parámetros y buscamos $k(t)$ de manera que $X(t) = k(t)e^{H(t)}$ sea solución de $x' = P(t)x + Q(t)$.

Entonces $k(t)$ debe ser tal que valga

$$\left(k(t)e^{H(t)}\right)' = P(t)\left(k(t)e^{H(t)}\right) + Q(t)$$

entonces

$$k'(t)e^{H(t)} + k(t)e^{H(t)}H'(t) = P(t)k(t)e^{H(t)} + Q(t)$$

esto implica que

$$k'(t)e^{H(t)} + k(t)e^{H(t)}P(t) = P(t)k(t)e^{H(t)} + Q(t)$$

lo que finalmente da

$$k'(t)e^{H(t)} = Q(t)$$

es decir,

$$k'(t) = Q(t)e^{-H(t)}$$

Buscamos una primitiva de $Q(t)e^{-H(t)}$ que llamamos $k_0(t)$. Entonces todas las primitivas de $Q(t)e^{-H(t)}$ son

$$k_0(t) + k, \qquad \text{con } k \text{ constante.}$$

Luego, las soluciones del no homogéneo $x' = P(t)x + Q(t)$ son

$$x(t) = (k_0(t) + k)\, e^{H(t)}.$$