# CLASE 18. ECUACIONES DIFERENCIALES

## MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

## 1. Ecuaciones diferenciales

Supongamos que

$$P(t) = \text{“cantidad de individuos de una población en tiempo } t\text{”}.$$

Entonces

$$P(t+1) = \text{“cantidad de individuos de una población en tiempo } t+1\text{”}.$$

y la diferencia

$$P(t+1) - P(t) = \text{“crecimiento de la población en al período de } t \text{ a } t+1\text{”}.$$

Si suponemos que este crecimiento es proporcional a la población en el timpo $t$, y llamamos

$$f = \text{“tasa de fecundidad”}, \qquad m = \text{“mortalidad”}.$$

Entonces

$$P(t+1) = P(t) + (f-m)P(t) = (1+f-m)P(t).$$

y ya vimos, que si $P(0) = P_0$, nos queda $P(t) = P_0(1+f-m)^t$. Pero esto nos da una estimación “discreta"de un período en otro.

Supongamos que ahora tomamos un crecimiento en el tiempo que no sea cada período de tiempo 1, sino un período $h > 0$. Tendremos

$$P(t+h) - P(t) = \text{“crecimiento en el período de } t \text{ a } t+h\text{”}.$$

Si hacemos

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \text{“crecimiento promedio en el período de } t \text{ a } t+h\text{”}.$$

y si tomamos

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h}}_{P'(t)} = \text{“tasa de crecimiento instantánea en } t\text{”}.$$

Entonces

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \text{“tasa de crecimiento instantánea per cápita en } t\text{”}.$$

Si la tasa de crecimiento instantánea per cápita es constante, tendremos

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = r \quad \Rightarrow \quad P'(t) = rP(t)$$

Si además sabemos que $P(0) = P_0$, ¿podemos calcular $P(t)$ en cualquier $t$ ?

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = r \quad \Rightarrow \quad (\ln(P(t))) = r \qquad \Rightarrow \qquad \text{para } s > 0 \quad \int_0^s (\ln(P(t)))'\, dt = \int_0^s r\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln(P(t))\Big|_0^s = rt\Big|_0^s$$

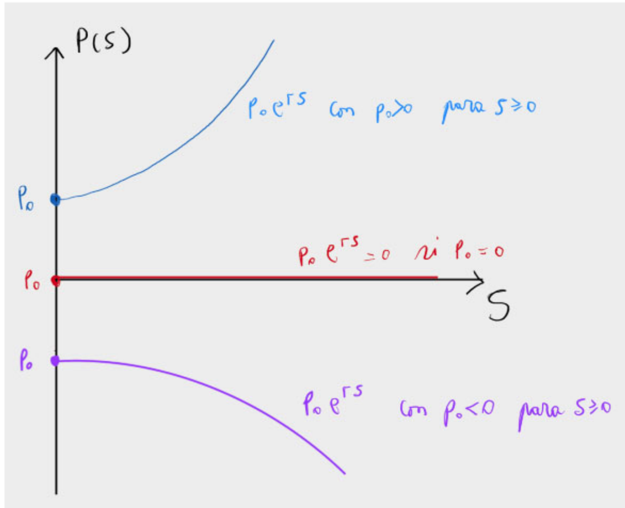
entonces

$$\ln(P(s)) - \ln \underbrace{P(0)}_{P_0} = rs - r\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(P(s)) - \ln P_0 = rs.$$

Aplicando exponencial

$$e^{\ln(P(s)) - \ln P_0} = e^{rs} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{e^{\ln(P(s))}}_{=P(s)} \underbrace{e^{-\ln P_0}}_{=1/P_0} = e^{rs} \quad \Rightarrow \quad P(s) = P_0 e^{rs}.$$

Gráficamente:




**¿Qué es una ecuación diferencial?**

Una ecuación diferencial es una ecuación, donde la incógnita es una función $x(t)$, que involucra a la función y a sus derivadas.

**Ejemplo:** Buscar todos las funciones derivables $x(t)$ que satisfacen:

$$x'(t) = 2x(t).$$

A este tipo de ecuaciones diferenciales que involucran hasta la primera derivada, se los llama ecuaciones diferenciales de orden 1.

Si involucran hasta derivadas de orden $n$ de la función buscada, se las llama ecuaciones diferenciales de orden $n$.
Por ejemplo,
a) $x'(t) = 2x(t) \to$ orden 1
b) $x''(t) = 2x'(t) + x(t) \to$ orden 2
**Notación**: estas ecuaciones se escriben también así:
a) $x' = 2x$
b) $x'' = 2x' + x$.

¿Qué me piden cuándo me dicen que resuelva una ecuación diferencial como la de antes: $x' = 2x$?

Me están pidiendo que encuentre todas las posibles funciones $x(t)$ que satisfagan la ecuación $x'(t) = 2x(t)$ y un intervalo $I$ para cada posible solución $x(t)$ donde esté definida esa función $x(t)$.

Volviendo al **ejemplo**: encontrar todas las posibles soluciones de $x' = 2x$.

**Resolución**:

$$x' = 2x$$

Si $x = 0$ veo que es efectivamente una solución.
Si ahora $x \neq 0$, entonces

$$\frac{x'}{x} = 2$$

entonces, sus primitivas difieren en una constante:

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int 2\,dt + k. \tag{1.1}$$

Busco una primitiva de $\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt$: hago la sustitución

$$u = x(t) \qquad \Longrightarrow \qquad du = x^2(t)dt.$$

Esto da que

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + k = \ln|x(t)| + k.$$

Volviendo a (1.1) nos queda

$$\ln|x(t)| = 2t + k$$

Entonces

$$e^{\ln|x(t)|} = e^{2t+k} = e^{2t} \cdot e^{k} \quad \Rightarrow \quad |x(t)| = e^{c} \cdot e^{2t} \quad \rightarrow \quad x(t) = \pm e^{c} e^{2t}$$

donde, si denotamos $k := \pm e^{c}$ llegamos a que

$$x(t) = k \cdot e^{2t} \text{ con } k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Agrego también $k = 0$ que es la solución $x \equiv 0$.

Estas son todas las soluciones que me piden.

**Verificar** que $x(t) = ke^{2t}$ satisface $x' = 2x$ para cualquier $k$.

Otras veces me piden la solución de un problema a valores iniciales.

En este caso me piden la única solución de una ecuación diferencial con un dato inicial, por ejemplo

$$\text{P.V.I.} \qquad \begin{cases} x' = 2x & \text{ecuación diferencial} \\ x(0) = 1 & \text{dato inicial} \end{cases}$$

En este caso, primero busco todas las soluciones de la ecuación diferencial $x' = 2x$, que me dio $x(t) = ke^{2t}$, y luego determino quién debe ser el parámetro $k$ para que valga el dato inicial $x(0) = 1$.

En este ejemplo:

$$x(t) = ke^{2t} \quad \Rightarrow \quad x(0) = ke^{0} = k \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{como } x(0)=1} \quad \Rightarrow \quad k = 1.$$

Entonces la única solución que buscaba es

$$x(t) = e^{2t}.$$

## 2. Ecuaciones diferenciales de orden 1

La forma general de escribir una ecuación de orden 1 es

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

para alguna función $F(\cdot, \cdot)$.

En el ejemplo anterior teníamos $F(t, x(t)) = 2x(t)$ o también podemos escribirla como $F(t, x) = 2x$

Otros ejemplos podrían ser.

a) $x'(t) = (x(t))^2 \qquad$ (acá $F(t, x) = x^2$).

b) $x'(t) = t^3(x(t))^2 \qquad$ (acá $F(t, x) = t^3x^2$).

## 3. Separación de variables

Es una técnica que nos va a permitir resolver ecuaciones de primer orden (no todas) del tipo $x' = F(t, x)$.

**Ejemplo:** Resolver $x' = tx$.

$x = 0$ es una solución.
Si $x \neq 0$ entonces $\frac{x'}{x} = t$.
Entonces las primitivas de $\frac{x'}{x}$ y $t$ difieren un una constante.

Calculamos sus primitivas

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\, dt = \text{ ya vimos que una primitiva es } \ln|x(t)|.$$

Recordemos como dedujimos eso:

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\, dt = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln|x(t)| + C$$

donde hemos realizado la sustitución $u = x(t)$, lo que da $du = x'(t)dt$.

Podemos usar como método esto:

$x'(t) = tx(t)$, lo escribimos como:

$$\frac{dx}{dt} = tx$$

y pasamos todo lo que tiene $x$ para un lado y lo que tiene $t$ al otro:

$$\frac{1}{x}dx = tdt,$$

ahora calculo a la izquierda la primitiva en función de $x$ y a la derecha la primitiva en función de $t$ mas una constante:

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C$$

Como tenemos que $x = x(t)$ nos queda:

$$\ln|x(t)| = \frac{t^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad |x(t)| = e^{\frac{t^2}{2}+k} = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{e^c}_{\substack{constante \\ positiva}} \quad \Rightarrow \quad x(t) = ke^{\frac{t^2}{2}}$$

son **todas** las soluciones (chequear que efectivamente $x' = tx$).

Esto que hicimos se puede hacer en general si tenemos variables separadas, es decir, si tenemos

$$x' = \underbrace{f(t) \cdot g(x)}_{F(t,x)}.$$

En el ejemplo que vimos recién:

$$x' = \underbrace{t}_{f(t)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}$$

(Por ejemplo, $\quad x = t + x$ no se puede escribir como $f(t) \cdot g(x)$).

Entonces, si tenemos $x' = f(t) \cdot g(x)$, lo escribinos como

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{g(x)}dx = f(t)dt.$$

Si $H(x)$ es una primitiva de $\frac{1}{g(x)}$ y $F(t)$ es una primitiva de $f(t)$, nos queda

$$H(x) = F(t) + C$$

y al final, como $x = x(t)$, nos queda que

$$H(x(t)) = F(t) + C.$$

Luego, a partir de esto intentamos despejar $x(t)$.

**Ejemplo:** Dada $x'x^2 = \cos(t)$, encontrar todas las soluciones

Resolución: separamos variables:

$$\frac{dx}{dt}x^2 = \cos(t) \quad \Longrightarrow \quad x^2dx = \cos(t)dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^3}{3} = \sin(t) + C \quad \Longrightarrow$$

entonces

$$x(t) = (3\sin(t) + C)^{\frac{1}{3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Derivando y reemplazando en la ecuación comprobamos que es efectivamente solución.

## 4. Teorema de existencia y unicidad

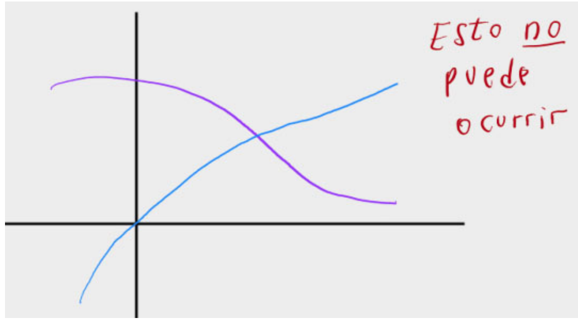
Dado un problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

con $F$ diferenciable. Entonces existe $\delta > 0$ y una única solución $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ derivable que es solución de (4.1).

Una vez que sabemos que hay una única solución y la encontramos, podemos determinar el intervalo $I$ más grande posible con $t_0 \in I$ donde está definida $x(t)$ y se satisface (4.1).

**Observación**: El gráfico de dos soluciones de una ecuación diferencial del tipo $x' = F(x)$ ($F$ no depende explícitamente de $t$) con distintos datos iniciales $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$ no pueden cruzarse si las soluciones no son la misma.


Esto no
puede
ocurrir