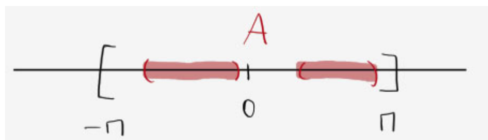
CLASE 17. EXTREMOS CON RESTRICCIONES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

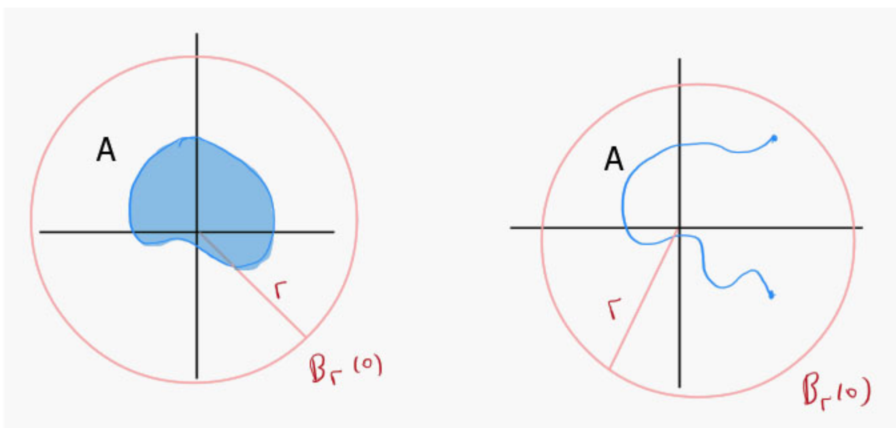
PROF. ARIEL SALORT

Recordemos la siguiente definición.

Definición: Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado si existe un intervalo $[-r, r]$ de manera que $A \subseteq [-r, r]$



Definición: En $\mathbb{R}^2$ decimos que en conjunto to $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es acotado si existe un radio r de manera que $A \subseteq B_r(0)$



Vamos a encarar distinto los problemas de máximos y mínimos si el conjunto es acotado o no.

Ejemplo: Dada $F(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)$, hallar máximos y mínimos absolutos de F en $S = \left\{(x, y) : \quad y = \frac{4}{x}\right\}$.

El conjunto S es una recta. La parametrizamos por $\gamma(x) = (x, \frac{4}{x})$ con $x \in \mathbb{R}$.
Miramos la restricción de F sobre la recta:

$$h(x) = F(\gamma(x)) = \ln(x^2 + \frac{16}{x^2} + 1).$$

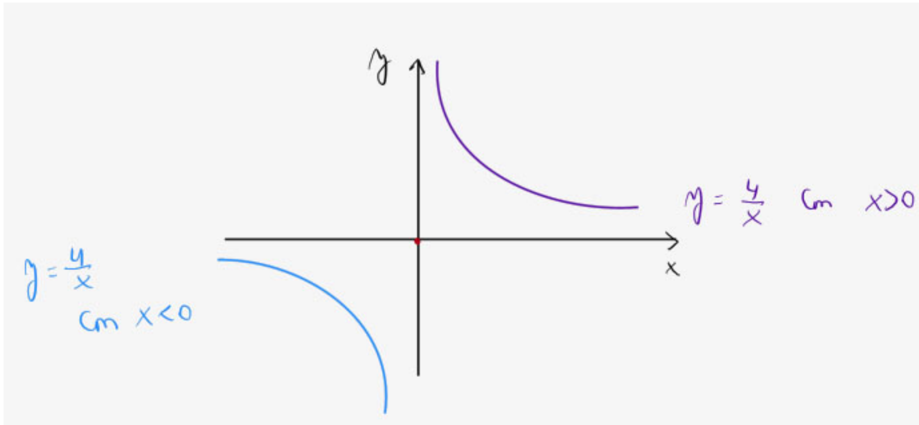
Los candidatos a extramos serán

$$h'(x) = \frac{2x - 32x^{-3}}{x^2 + \frac{16}{x^2} + 1} = 0 \implies 2x^4 = 32 \implies x = \pm 2$$

Si $x = 2$ entonces $y = 2$, si $x = -2$ entonces $y = -2$. Los candidatos a extremos son

$$(2, 2), \quad (-2, -2).$$

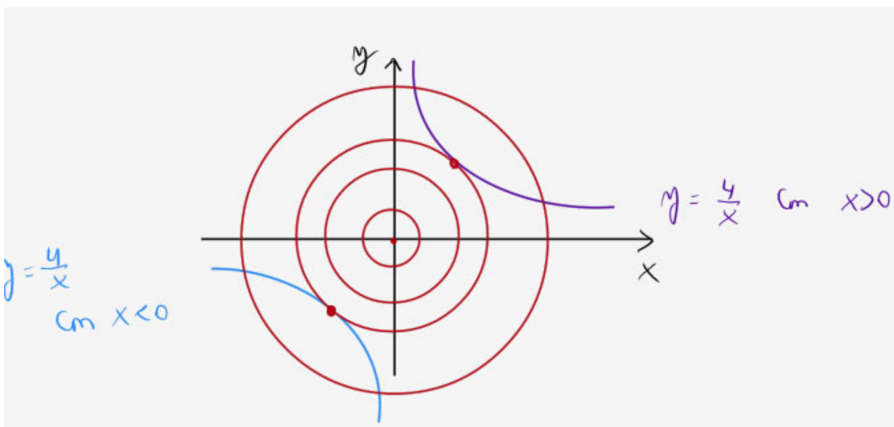
¿Cómo defino si son máximos o mínimos locales? El conjunto S en este ejemplo es no acotado.



Para determinar si son máximos o mínimos locales tendremos que mirar las curvas de nivel de F.

Empezamos por determinar en qué nivel están $(2,2)$ y $(-2,-2)$:

$$F(2,2) = \ln\left(2^2 + 2^2 + 1\right) = \ln(9)$$
$$F(-2,-2) = \ln\left((-2)^2 + (-2)^2 + 1\right) = \ln(9)$$



Curva de nivel c de F:

$$\begin{aligned} S_c(F) &= \left\{(x,y) : \ln\left(x^2+y^2+1\right) = c\right\} \\ &= \left\{(x,y) : x^2+y^2+1 = e^c\right\} \\ &= \left\{(x,y) : \quad x^2+y^2 = e^c - 1\right\}. \end{aligned}$$

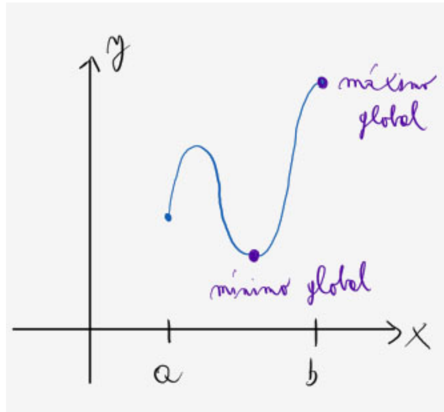
Este conjunto es vacío si $e^c - 1 < 0$. Es el $(0,0)$ si $e^c - 1 = 0$, y son circunferencias de centro cero si $e^e - 1 > 0$.

Vemos que las curvas de nivel tienen nivel más alto cuanto más grande es el radio de la circunferencia. Esto nos muestra que $(2,2)$ y $(-2,-2)$ son ambos mínimos absolutos pero no hay máximos absolutos.

Para el siguiente ejemplo vamos a desarrollar un poco más de teoría.

Recordemos el teorema de Weierstrass en una variable.

Teorema: Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con f continua, se alcanza el máximo y mínimo global de f en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$.

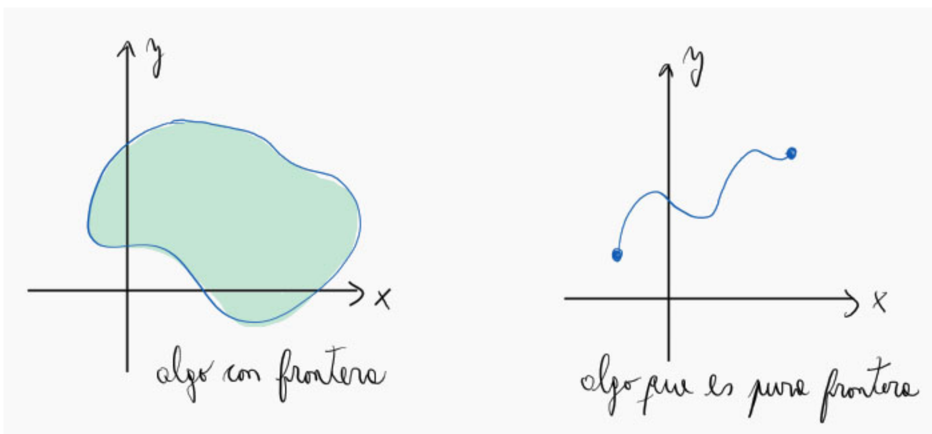


Estos extremos globales pueden estar un (a, b) ó en $x = a$ ó $x = b$.

En $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ vale lo mismo.

Teorema: Dada $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua y A cerrado y acotado, entonces F alcanza su máximo y mínimo global en A.

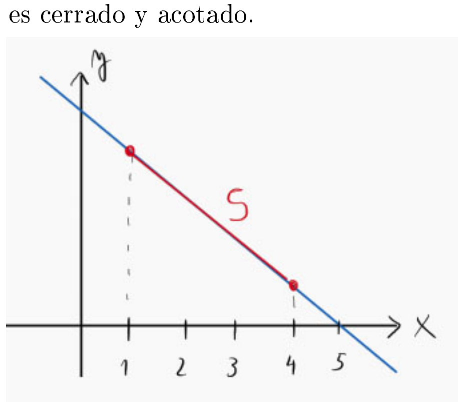
¿Qué tipo de conjuntos son cerrados y acotados en $\mathbb{R}^2$?



Ejemplo:

Dada $F(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)$, hallar máximos y mínimos absolutos de F en $S = \{(x, y) : \ y = 5-x, 1 \leq x \leq 4\}$

Notemos que S es un segmento. S es cerrado y acotado.



Entonces por el teorema de Weierstrass sabemos que F debe alcanzar máximo y mínimo en S. En este caso al igual que en una variable separamos en dos casos:

i) Miramos en el segmento sin los extremos

ii) Agregemos los extremos del segmento al conjunto de candidatos que en este caso son $(1, 4)$ y $(4, 1)$.

Procedemos con i):

La curva abierta de S está parametrizada por $\gamma(x) = (x, 5-x)$, $1 < x < 4$. Entonces la función F restringida a la curva nos da

$$h(x) = F(\gamma(x)) = \ln(x^2 + (5-x)^2 + 1) = \ln(2x^2 - 10x + 26), \quad x \in (1,4).$$

Buscamos los extremos:

$$h'(x) = \frac{4x - 10}{2x^2 - 10x + 26} \implies h'(x) = 0 \iff x = \frac{5}{2}.$$

Como $x = \frac{5}{2} \in (1,4)$, entonces $y = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$. Lo consideramos como posible candidato.

ii) Agregamos los candidatos de los extremos de la curva, esto es, $(1,4)$ y $(4,1)$.

Por lo tanto, candidatos:

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad (1,4), \quad (4,1).$$

Ahora hacemos la evaluación de F en cada uno de ellos:

$$F\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1\right) = \ln\left(\frac{25}{2} + 1\right) \approx 2{,}6$$

$$F(1,4) = \ln\left(1^2 + 4^2 + 1\right) = \ln(18) \approx 2{,}89$$

$$F(4,1) = \ln\left(4^2 + 1^2 + 1\right) = \ln(18) \approx 2{,}89$$

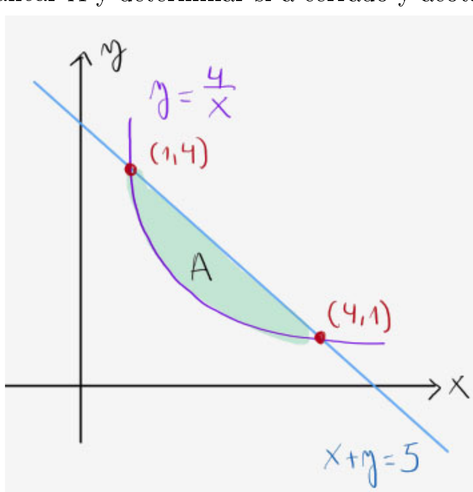
Por el teorema sabemos que F seguro alcanza máximo y mínimo absoluto en S, por lo que deben ser algunos de los candidatos que obtuvimos.

Como F toma valor más grande en $(1,4)$ o $(4,1)$ (y es el mismo valor), entonces $(1,4)$ y $(4,1)$ deben ser máximos absolutos.

Como F toma el valor más chico en $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, éste debe ser el mínimo absoluto.

Ejemplo:
Dada $F(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)$, hallar máximoss y mínimo absolutos de F en $A = \left\{(x,y) : y \geqslant \frac{4}{x}, x > 0, x + y \leqslant 5\right\}$

En este caso, primero trato de graficar A y determinar si a cerrado y acotado.



Vemos que A es cerrado y acotado, y consta de varias partes:

1. Su interior (la parte de adentro sin su frontera).
2. Su frontera, que a su vez tiene varias partes a tener en cuenta:

a) La frontera de abajo que es un pedazo de la hipérbola

$$y = 4/x$$

b) La frontera de arriba que es un pedazo de la recta

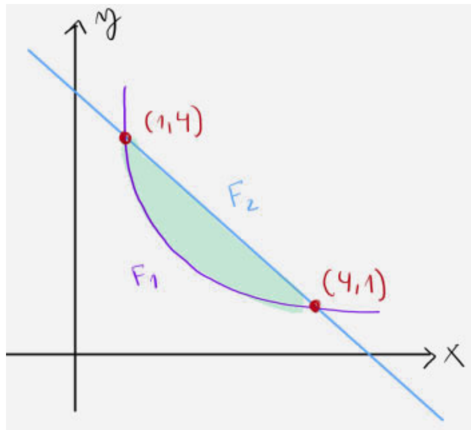
$$y = -x + 5$$

c) Las esquinas donde se cruzan la frontera de arriba con la de abajo.

Para determinar los conjuntos a), b) y c) buscamos la intersección de las fronteras de arriba y le de abajo: Buscamos (x, y) que satisfagan a la vez $y = \frac{4}{x}$ y $y = -x + 5$.

$$\frac{4}{x} = -x + 5 \Rightarrow 4 = x(-x+5) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ ó } x = 1.$$

Si $x = 1 \Rightarrow y = -1 + 5 = 4$
si $x = 4 \Rightarrow y = -4 + 5 = 1$. Los puntos donde se intersecan son $(1, 4)$ y $(4, 1)$.



Ademas, esto nos dice que la frontera de abajo es:

$$F_1 = \left\{(x, y) : y = \frac{4}{x}, 1 < x < 4\right\}$$

y la frontera de arriba es:

$$F_2 = \{(x, y) : y + x = 5, 1 < x < 4\}$$

Parametrizamos a F_1 por $\gamma_1(x) = (x, \frac{4}{x})$ con $1 < x < 4$, y sobre esta curva la función F vale:

$$h_1(x) = \ln(\gamma_1(x)) = \ln(x^2 + \frac{4^2}{x^2} + 1).$$

Parametrizamos a F_2 por $\gamma_2(x) = (x, 5 - x)$ con $1 < x < 4$, y sobre esta curva la función F vale:

$$h_2(x) = \ln(\gamma_2(x)) = \ln(x^2 + (5-x)^2 + 1) = \ln(2x^2 - 10x + 26).$$

Buscamos candidatos sobre estos dos bordes:

$$h_1'(x) = \frac{2x - 32x^{-3}}{x^2 + \frac{16}{x^2} + 1} = 0 \implies 2x^4 = 32 \implies x = \pm 2$$

$$h_2'(x) = \frac{2x - 10}{x^2 + (5-x)^2 + 1} = 0 \implies 2x - 10 = 0 \implies x = \frac{5}{2}.$$

Si $x = 2$ entonces $y = h_1(2) = \ln 9$, al $x = -2$ no lo consideramos porque no pertenece al intervalor $(1, 4)$. Si $x = \frac{5}{2}$ entonces $y = h_2(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}$.

Por lo tanto tenemos los candidatos:

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad (2, \ln 9).$$

Los puntos de las esquinas, la intersecciones de las fronteras son también candidatos:

$$(4, 1), \quad (1, 4).$$

Candidados a extramos en el interior:

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y) &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\ &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\right) = (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Pero $(0, 0)$ no pertenece al interior de la región A, entonces no es candidato. Entonces, no hay candidatos a máximo ó mínimo absoluto en el interior de A.

Como F es continua y A es cerrado y acotado, sabemos que F alcanza máximo y mínimo absolutos en A.

Así si un punto de A es máximo o mínimo absoluto debe ser uno de los candidatos que encontramos. Luego solo resta determinar cual (o cuales) toma el mayor valor, que será máximo global y cual (o cuales) toma el menor valor, que será mínimo global.

$$\begin{aligned}
&F(2,2) = \ln\left(2^2+2^2+1\right) = \ln(9) \simeq 2{,}2\\
&F\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{25}{2}+1\right) \simeq 2{,}6\\
&F(1,4) = F(4,1) = \ln\left(2^2+2^2+1\right) = \ln(9) \simeq 2{,}2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ se alcanza un máximo absoluto de F en A y en $(2,2)$ y $(1,4)$ la función F alcanza dos mínimos absolutos en A.