CLASE 16. CRITERIO DEL HESSIANO

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Criterio del Hessiano en $\mathbb{R}^3$

Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, D abierto y $p = (p_1, p_2, p_3) \in D$ y F 4 veces diferenciable. Si p es un punto crítico (o sea, $\nabla F(p) = (0, 0, 0)$) y la matriz Hessiana

$$HF(p) = \begin{pmatrix} F_{xx}(p) & F_{xy}(p) & f_{xz}(p) \\ F_{yx}(p) & F_{yy}(p) & F_{yz}(p) \\ F_{zx}(p) & F_{zy}(p) & F_{zz}(p) \end{pmatrix}$$

tiene:

1) todos sus autovalores positivos, entonces p es mínimo local.
2) todos sus autovalores negativos, entonces p es máximo local.
3) Al menos un autovalor positivo y uno negativo, entonces p es punto de silla.

Por ejemplo, si $HF(p)$ fuera diagonal (tiene los autovalores en la diagonal)

$$HF(p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

miramos las submatrices (λ_1), $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$:

caso 1) sería tener $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$. Y en este caso

$$\det HF(p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$$
$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$
$$\lambda_1 > 0$$

caso 2) sería tener $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. Y en este caso

$$\det HF(p) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$$
$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$
$$\lambda_1 < 0$$

El método general dice:

Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, D abierto, $p = (p_1, p_2, p_3) \in D$ y F 3 veces diferenciable. Si p es un punto crítico (o sea, $\nabla F(p) = (0, 0, 0)$), si se cumple que:

(1)

$$\det HF(p) > 0, \qquad \det \begin{pmatrix} F_{xx}(p) & F_{xy}(p) \\ F_{yx}(p) & F_{yy}(p) \end{pmatrix} > 0, \qquad \text{y} \quad F_{xx}(p) > 0$$

entonces p es un mínimo local.

(2)

$$\det HF(p) < 0, \qquad \det \begin{pmatrix} F_{xx}(p) & F_{xy}(p) \\ F_{yx}(p) & F_{yy}(p) \end{pmatrix} > 0, \qquad \text{y} \quad F_{xx}(p) < 0$$

entonces p es un máximo local.

(3) $\det HF(P) \neq 0$ y no se satisfacen las tres condiciones de 1) ni las tres condiciones de 2), entonces p es un punto de silla.

Con esto terminamos las técnicas para encontrar extremos locales de una función en un conjunto D abierto.

Resumiendo:

(1) Calculo $\nabla F(x, y)$ ó $\nabla F(x, y, z)$.

(2) Busco todas las soluciones en D de $\nabla F(x, y) = (0, 0)$ $\big($si $D \subseteq \mathbb{R}^2\big)$ ó $\nabla F(x, y, z) = (0, 0, 0)$ $\big($si $D \subseteq \mathbb{R}^3\big)$.

Ojo! Una vez que encontré todos los soluciones, chequeo que estén en el abierto D. Si no están, no son puntos críticos de F en D y entonces no los considero.

(3) Uso el criterio del Hessiano para cada punto crítico encontrado en 2) y defino si son máximos, mínimos o puntos de ensilladura.

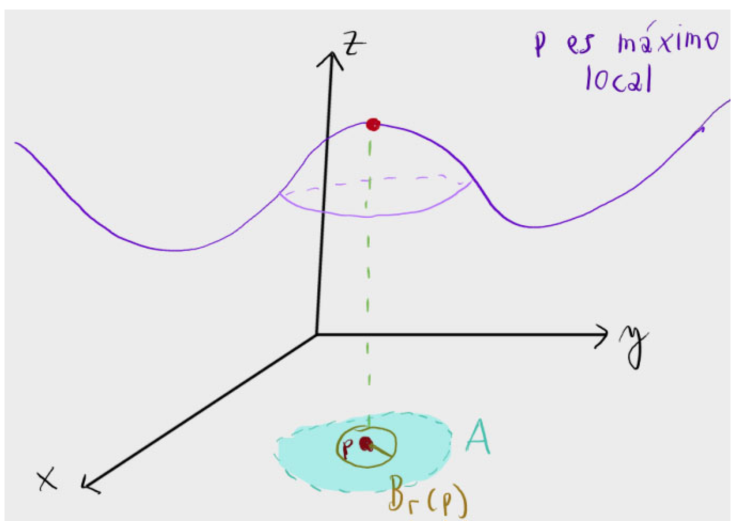
Antes de seguir repasemos los conceptos de extremo local y global.

Si estoy estudiando extremos de F en A donde A es ahora cualquier tipo de conjunto, (A puede ser un abierto, un cerrado, una curva) decimos que:

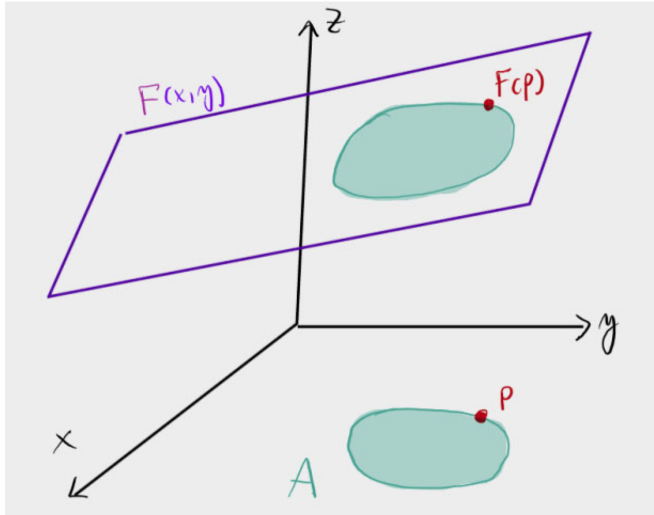
- $p \in A$ es un máximo local si existe un disco $B_r(p)$ tal que
$$F(p) \geq F(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in B_r(p) \quad \text{tal que} \quad (x, y) \in A.$$

- $p \in A$ es un mínimo local si existe un disco $B_r(p)$ tal que
$$F(p) \leq F(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in B_r(p) \quad \text{tal que} \quad (x, y) \in A.$$

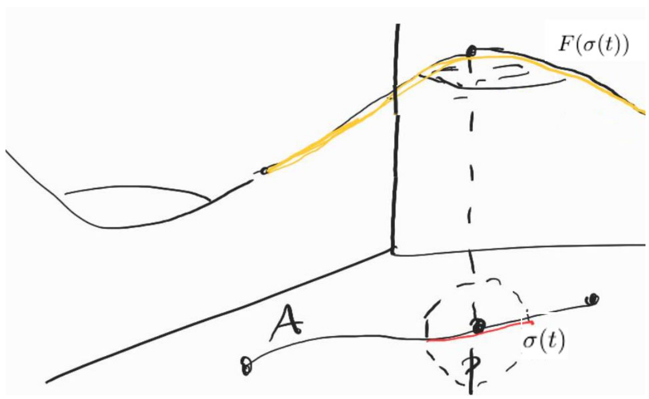
Si A es abierto, es lo que vimos la clase pasada:



Si A es cerrado, puede pasar que el extremo p esté en la frontera:



Si A es una curva: $A = \{\sigma(t) \subseteq \mathbb{R}^2, t \in I\}$



Solo lo que está en rojo está en $B_r(p)$ y A a la vez.

Vamos a estudiar a continuación esto último caso y la clase que viene casos como el segundo.

Antes de seguir recordemos que era un extremo global o absoluto.

Decimos que p es un máximo global de F en A si $p \in A$ y

$$F(p) \geq F(x,y) \quad \text{para todo } (x,y) \in A.$$

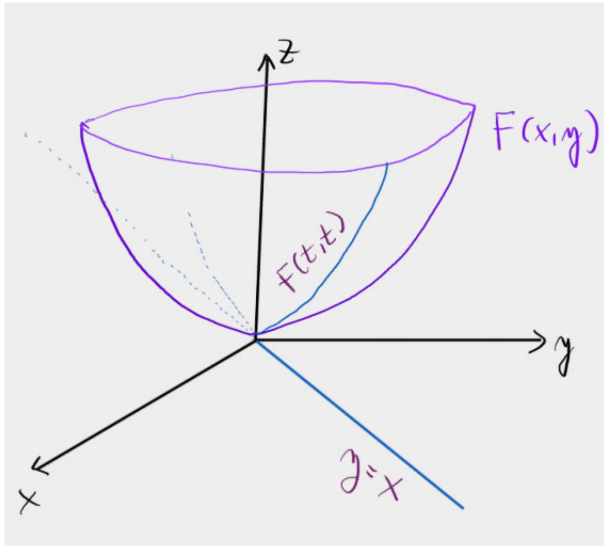
Decimos que p es un mínimo global de F en A si $p \in A$ y

$$F(p) \leq F(x,y) \quad \text{para todo } (x,y) \in A.$$

Observemos que si p es máximo global de F en A entonces p es máximo local de F en A. Si p a mínimo global de F en A entonces p es mínimo local de F en A.

¿Qué pasa si ahora quiero encontrar extremos de $F(x,y)$ en en conjunto que es una curva?

Por ejemplo: determinar los extremos locales de $F(x,y) = x^2 + y^2$ en $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y = x\}$.



Lo que hacemos es considerar una parametrización de

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} : \quad y = x\}$$

dada por $x = t$, $y = t$, entonces una parametrización de S es

$$\sigma(t) = (t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Miramos ahora la función

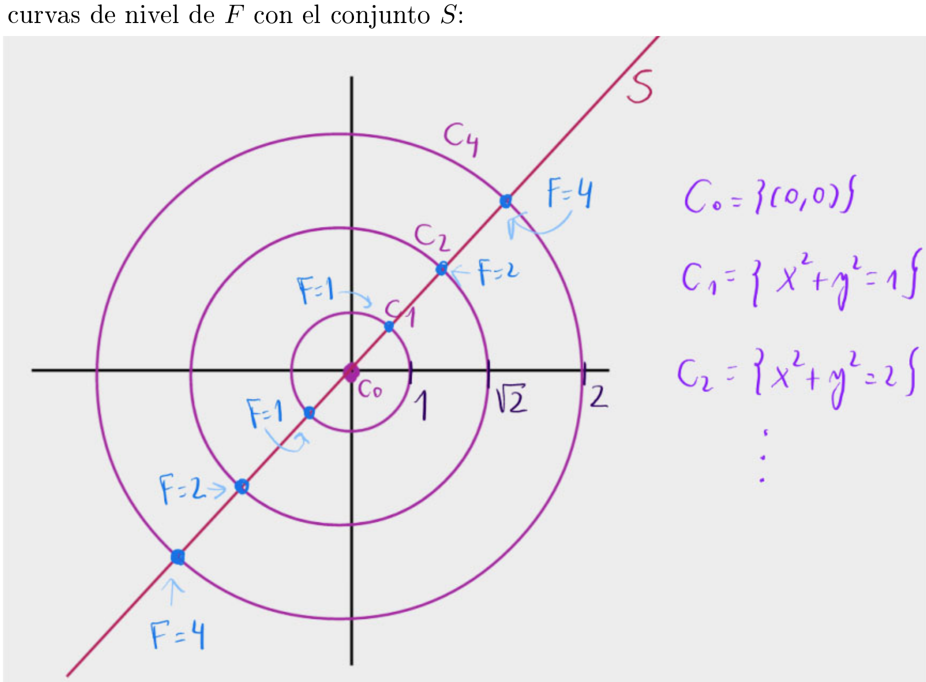
$$F(\sigma(t)) = F(t, t) = t^2 + t^2 = 2t^2.$$

Llamamos $g(t) = 2t^2$ y buscamos máximos y mínimos como función de una variable:

$$g'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$$

y vemos que $t = 0$ es mínimo global (y entonces mínimo local) y no hay máximos. Lo paso a valores en la curva: $t = 0$ da $\sigma(0) = (0, 0)$, entonces $(0, 0)$ es mínimo global (y entonces mínimo local), y $F(t, t)$ no tiene máximo.

Miremos las curvas de nivel de F con el conjunto S:



Vemos con este diagrama que en $(0, 0)$ donde $F(0, 0) = 0$ se toma el valor mínimo y que para $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$ sobre la recta, F toma valores arbitrariamente grandes.