CLASE 15. MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN DOS VARIABLES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Máximos y mínimos en 2 variables

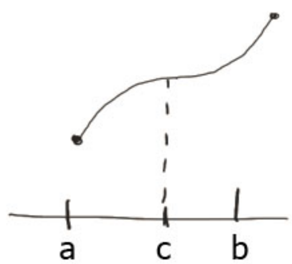
Recordemos que vimos la clase pasada:

Teorema de Fermat en 1 variable: si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable y $x_0 \in (a, b)$ es extremo local, entonces $f'(x_0) = 0$.

Importante:

(i) Puede pasar que a sea extremo pero $f'(a) \neq 0$. Lo mismo con b.

(ii) Puede pasar que $f'(x_0) = 0$ con $x_0 \in (a, b)$ pero x_0 no sea extremo local.



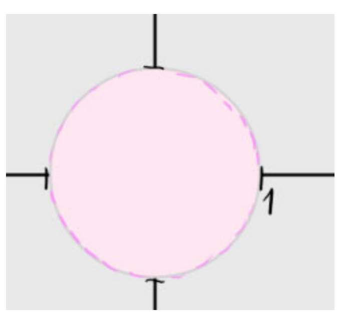
En la imagen, a es mínimo y b es máximo, y $f'(c) = 0$ pero c no es extremo local.

Veamos que ocurre ahora en **varias variables**.

En 1 dimensión, a los intervalos (a, b) que no contienen sus bordes se los llama *intervalos abiertos*.

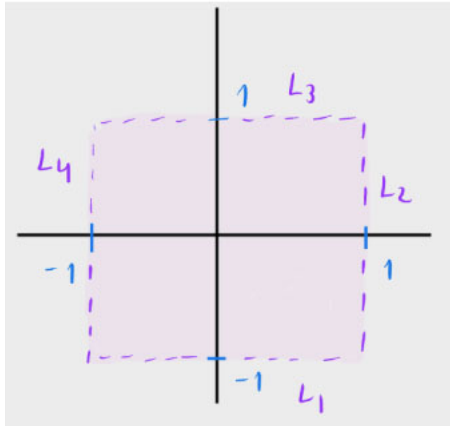
¿Qué es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$? Con la misma idea que en $\mathbb{R}$, se dice que un *conjunto es abierto* si no contiene su frontera. A la *frontera* de un conjunto D se la nota con ∂D.

Ejemplo: (1) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto.



La frontera es $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(2) $D = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$ es abierto



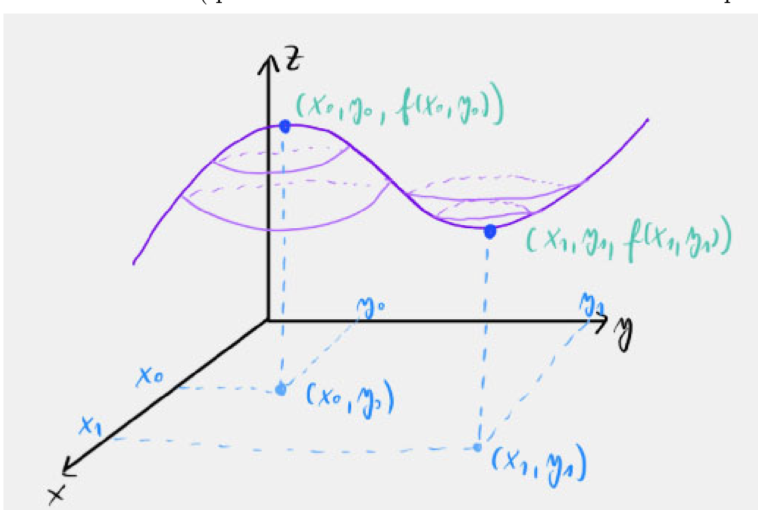
La frontera es $\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ donde

$$L_1 = \{(x,y) : x \in [-1,1], y = -1\}$$
$$L_2 = \{(x,y) : y \in [-1,1], x = 1\}$$
$$L_3 = \{(x,y) : x \in [-1,1], y = 1\}$$
$$L_4 = \{(x,y) : y \in [-1,1], x = -1\}$$

(3) $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ no es abierto porque contiene a su frontera

Notación: $B_r(x_0, y_0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\right\}$ es al *disco abierto* (o círculo abierto) de centro (x_0, y_0) y radio r.

Nota: $\mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$. Así como en $\mathbb{R}$ para definir máximos y mínimos locales usamos intervalos abiertos, en $\mathbb{R}^2$ usaremos discos abiertos (que son como los intervalos alrededor de un punto).



Definición: : Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con D un conjunto abierto.

(1) Decimos que F alcanza *un máximo local* en (x_0, y_0) si existe $r > 0$ y $B_r(x_0, y_0) \subseteq D$ tal que
$$F(x,y) \leq F(x_0, y_0) \qquad \text{para todo } (x,y) \in B_r(x_0, y_0)\,.$$

(2) Decimos que F alcanza un *mínimo local* en (x_1, y_1) si existe, $\delta > 0$ y $B_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ tal que
$$F(x,y) \geqslant F(x_1, y_1) \qquad \text{para todo } (x,y) \in B_\delta(x,y).$$

(3) Decimos que F alcanza (o tiene) un *extremo local* en un punto $\vec{p}$ si tiene un máximo o mínimo local en $\vec{p}$.

Tenemos un teorema de Fermat para dos variables:

Teorema de Fermat: Supongamos $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D un conjunto abierto con $\vec{p} \in D$ y F es diferenciable. Si $\vec{p}$ es un extremo local de F entonces $\nabla f(\vec{p}) = (0,0)$.
(Geométricamente son puntos donde el plano tangente es horizontal).

Definición: : si $\vec{p}$ es tal que $\nabla F(\vec{p}) = (0,0)$, decimos que $\vec{p}$ es un *punto crítico*.

Igual que en una variable tenemos:

(1) Fermat vale si $\vec{p} \in D$ con D abierto pero no vale si $\vec{p}$ está en la frontera de D.

(2) No vale la recíproca: Puedo tener $\vec{p}$ tal que $\nabla f(\vec{p}) = (0,0)$ con $\vec{p}$ que no es extremo local.

Definición: : A un punto $\vec{p}$ que es punto crítico de f pero no es extremo local se lo llama *punto de silla o punto de ensilladura*.

Ejemplo: (1) $F(x,y) = x^2 + y^2$. Sabemos que es difererenciable.
Buscamos puntos críticos:

$$(0,0) = \nabla F(x,y) = (2x, 2y) \iff 2x = 0, 2y = 0 \iff x = 0, y = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$

¿Es $(0,0)$ extremo local? Ver gráficamente.

(2) $F(x,y) = \ln\left(x^2 - y^2 + 1\right)$. En este caso $Dm\, f = \left\{(x,y) : x^2 - y^2 + 1 > 0\right\}$ y tenemos $\nabla F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2-y^2+1}, \frac{-2y}{x^2-y^2+1}\right)$.
Entonces

$$\nabla F(x,y) = 0 \iff \frac{2x}{x^2 - y^2 + 1} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{-2y}{x^2 - y^2 + 1} = 0 \iff x = 0,\ y = 0.$$

¿Será $(0,0)$ extremo local?

(3) Sea $F(x,y) = \frac{x^4}{4} - xy + \frac{y^4}{4}$. En este caso $\nabla F(x,y) = \left(x^3 - y, -x + y^3\right)$. Entonces

$$\nabla F(x,y) = (0,0) \iff x^3 - y = 0 \quad \text{y} \quad -x + y^3 = 0 \iff y = x^3,\ x = y^3.$$

Como tienen que cumplirse las dos ecuaciones a la vez, metemos el despeje $y = x^3$ en la segunda de ecuación

$$x = \left(x^3\right)^3 = x^9 \iff x - x^9 = 0 \iff x\left(1 - x^8\right) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x^8 = 1 \iff x = 0 \text{ ó } x = 1 \text{ ó } x = -1$$

(recordar que $x \in \mathbb{R}$).
Si $x = 0$, de la primera ecuación obtenemos $y = 0$.
Si $x = 1$, de la primera ecuación obtenemos $y = 1$.
Si $x = -1$, de la primera ecuación obtenemos $y = -1$

Entonces obtenemos tres puntos críticos:

$$(0,0),\ (1,1),\ (-1,-1),$$

¿Serán extremos locales?

Veamos ahora qué herramientas tenemos para determinar si un punto critico resulta ser en extremo local o no.

Igual que en 1 variable, supongamos que F es diferenciable 3 veces y que $\nabla F(\vec{p}) = (0,0)$ (es decir $\vec{p} = (p_1, p_2)$ es punto crítico), entonces podemos hacer Taylor de orden 2:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F(\vec{p}) + \langle \nabla F(\vec{p}), (x - p_1, y - p_2) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[F_{xx}(\vec{p})\,(x - p_1)^2 + 2F_{xy}(\vec{p})\,(x - p_1)\,(y - p_2)\ + F_{yy}(\vec{p})\,(y - p_2)^2\right] + R_2(x,y) \end{aligned}$$

Los términos de orden 2 los podemos reescribir como:

$$\frac{1}{2}\,(x - p_1, y - p_2)\begin{pmatrix} F_{xx}(\vec{p}) & F_{xy}(\vec{p}) \\ F_{yx}(\vec{p}) & F_{yy}(\vec{p}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix}$$

y a esta matiz de derivados segundas se la llama *matiz Hessiana* y se la denota $HF(\vec{p})$.
Como $\nabla F(\vec{P}) = 0$ nos queda

$$F(x,y) = F(\vec{p}) + \frac{1}{2}\,(x - p_1, y - p_2)\,HF(\vec{p})\begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix} + R_2(x,y).$$

Nos interesa ahora estudiar el *"signo"* de $HF(\vec{p})$ (ojo, es una matiz ahora, no un número). Veamos algunos posibles casos:

(1) si $HF(\vec{P}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ tendríamos

$$F(x,y) = F(\vec{p}) + \frac{1}{2}(x-p_1, y-p_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix} + R_2(x,y).$$

Esto da que

$$F(x,y) = F(\vec{p}) + \frac{1}{2}[\underbrace{2(x-p_1)^2 + 3(y-p_2)^2}_{\geq 0}] + R_2.$$

Entonces, para (x,y) cerca de (p_1,p_2) tendremos que $F(x,y) \geqslant F(\vec{p})$, con lo cual $\vec{p}$ sería un mínimo local.

Tendríamos un resultado similor si $HF(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$.

(2) si $HF(\vec{p}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ tendíamos

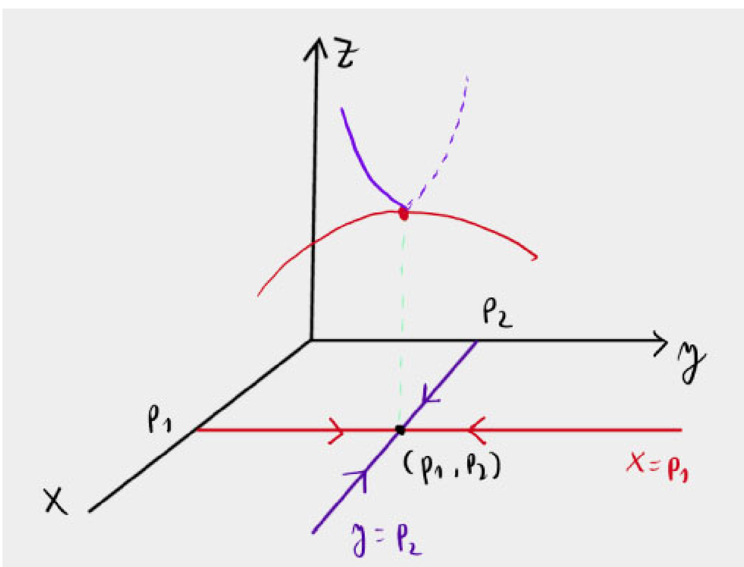
$$F(x,y) = F(\vec{p}) + \frac{1}{2}[\underbrace{-2(x-p_1)^2 - 3(y-p_2)^2}_{\leq 0}] + R_2.$$

Entonces, para (x,y) cerca de (p_1,p_2) tendremos que $F(x,y) \leqslant F(\vec{p})$, con lo cual $\vec{p}$ sería un máximo local.

Tendríamos un resultado similar si $HF(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$.

(3) si $HF(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ tendríamos

$$F(x,y) = F(\vec{p}) + \frac{1}{2}[2(x-p_1)^2 - 3(y-p_2)^2] + R_2.$$



En este caso si me acerco a (p_1,p_2) por la recta $x = p_1$ me queda

$$F(p_1,y) = F(p_1,p_2) + \frac{1}{2}\left(-3(y-p_2)^2\right) + R_2.$$

Entonces, como función de y se parece a una parábola negativa.

Por otro lado si me acerco a (p_1,p_2) por la recta $y = p_2$ me queda

$$F(x,p_2) = F(p_1,p_2) + \frac{1}{2}2(x-p_1)^2 + R_2.$$

Entonces $F(x,p_2)$ como función de x se parece a una parábola positiva.

De esto puedo concluir que $\vec{p}$ mo puede ser mínimo local ni máximo local y por lo tanto es un punto de ensilladura. Lo mismo pasa en general si

$$HF(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda_1 > 0 \quad y \quad \lambda_2 < 0 \qquad \text{ó} \qquad \lambda_1 < 0 \text{ y } \lambda_2 > 0.$$

Conclusión: Vimos hasta acá que, dada $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto, $\vec{p} \in D$ y F es diferenciable 3 veces, si $\vec{p}$ es un punto crítico ($\nabla F(\vec{p}) = (0,0)$) y $HF(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (es diagonal) entonces:

1. Si $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$ $\vec{p}$ es mínimo local.
2. Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$ $\vec{p}$ es máximo local.
3. Si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (o sea, tienen signos contrarios) $\Rightarrow$ $\vec{p}$ es punto de silla.

Nota: Como $F_{xy} = F_{yx}$, se tiene que $HF(\vec{p})$ es siempre una matiz simétrica. No siempre será diagonal pero sabemos que será diagonalizable y se prueba el siguiente teorema.

Teorema: sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto, $\vec{p} \in D$, F diferenciable 3 veces.
Si $\vec{p}$ es punto crítico y $HF(\vec{p})$ tiene autovalores λ_1, λ_2. Entonces:

1) Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ entonces $\vec{p}$ es mínimo local.
2) Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ entonces $\vec{p}$ es máximo local.
3) Si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (tienen signos contrarios) entonces $\vec{p}$ es un punto de silla.

¿Entonces tendremos que calcular autovalores de $HF(\vec{p})$?

Por suerte, no... se puede probar que se puede determinar el signo de los autovalores de una matriz simétrica con:

- el determinante
- el elemento que esta en primera fila o primera columna de le matriz.

Así se tiene:

Teorema: sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto, $\vec{p} \in D$, F diferenciable 3 veces. Si $\vec{p}$ es punto crítico, entonces

1) Si $\det HF(\vec{p}) > 0$ y $F_{xx}(\vec{p}) > 0$, entonces $\vec{p}$ es mínimo local.
2) Si $\det HF(\vec{p}) > 0$ y $F_{xx}(\vec{p}) < 0$, entonces $\vec{p}$ es máximo local.
1) Si $\det HF(\vec{p}) < 0$, entonces $\vec{p}$ es punto de silla.

Volvamos a los ejemplo:

Ejemplo: (1) Sea $F(x,y) = x^2 + y^2$. Vimos que $\nabla F(x,y) = (2x, 2y)$ y teníamos como único punto crítico el $(0,0)$. Calculamos la matriz Hessiana:

$$HF(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En particular $HF(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Esto me dice que $(0,0)$ es mínimo local.

(2) Sea $F(x,y) = \ln\left(x^2 - y^2 + 1\right)$. Vimos que $\nabla F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2-y^2+1}, \frac{-2y}{x^2-y^2+1}\right)$ y el único punto critico es $(0,0)$.

Hacemos

$$F_{xx}(x,y) = \frac{2\left(x^2 - y^2 + 1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2} = \frac{2\left(x^2 - y^2 + 1\right) - 4x^2}{\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2}$$

$$F_{xy}(x,y) = 2x \cdot \frac{-1}{\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2}(-2y) = \frac{4xy}{\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2}$$

$$F_{yy}(x,y) = \frac{-2\left(x^2 - y^2 + 1\right) + 2y(-2y)}{\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2} = \frac{-2\left(x^2 - y^2 + 1\right) + 4y^2}{x^2 - y^2 + 1}$$

Entonces

$$F_{xx}(0,0) = 2, \quad F_{xy}(0,0) = 0, \quad F_{yy}(0,0) = -2 \quad \Rightarrow \quad HF(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esto me dice que $(0,0)$ es un punto de silla.

(3) Sea $F(x,y) = \frac{x^4}{4} - xy + \frac{y^4}{4}$.

Vimos que $\nabla F(x,y) = \left(x^3 - y, -x + y^3\right)$ y los únicos puntos críticos son $\{(0,0),(1,1),(-1,-1)\}$. En este caso la matriz Hessiana es

$$HF(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ -1 & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

La evaluamos en los puntos críticos:

$$HF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

no es diagonal. $\det(HF(0,0)) = -1$. Entonces $(0,0)$ es punto de silla.

$$HF(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

no es diagonal. En este caso $\det(HF(1,1)) = 8 > 0$ y además $F_{xx}(1,1) = 3 > 0$. Entonces $(1,1)$ es mínimo local.

$$HF(-1,-1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

que es igual al de $(1,1)$. Entonces $(-1,-1)$ es mínimo local.

Nota: Si $\vec{p}$ es un punto crítico y $\det(Hf(\vec{p})) = 0$, entonces no podemos decir nada en principio.

Por ejemplo, pensar en las funciones $F(x,y) = x^4 + y^4$, $G(x,y) = -x^4 - y^4$, $K(x,y) = x^4 - y^4$.