CLASE 14. POLINOMIO DE TAYLOR EN TRES VARIABLES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

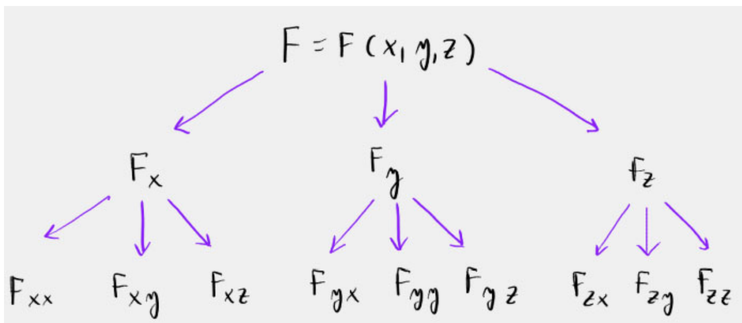
PROF. ARIEL SALORT

1. Polinomio de Taylor para funciones de 3 variables

Veamos algunas cuestiones relacionadas al polinomio de Taylor.

¿Cuántas derivadas primeras y segundas tenemos?

Miremos el árbol:



Hay 3 derivadas primeras y 9 derivadas segundas. Si usamos que las derivadas cruzadas coinciden:

$$F_{xy} = F_{yx}, \qquad F_{xz} = F_{zx}, \qquad F_{yz} = F_{zz},$$

tendremos los coeficientes que conforman los polinomios de Taylor de orden 1 y 2:

(1) Polinomio de Taylor de orden 1 centrado en (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} P_1(x,y,z) &= F(x_0,y_0,z_0) + F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) \\ &= F(x_0,y_0,z_0) + \langle \nabla F(x_0,y_0,z_0), (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle . \end{aligned}$$

Además este polinomio está caracterizado por las igualdades:

$$\begin{aligned} F(x_0,y_0,z_0) &= P_1(x_0,y_0,z_0) \\ F_x(x_0,y_0,z_0) &= (P_1)_x(x_0,y_0,z_0) \\ F_y(x_0,y_0,z_0) &= (P_1)_y(x_0,y_0,z_0) \\ F_z(x_0,y_0,z_0) &= (P_1)_z(x_0,y_0,z_0) \end{aligned}$$

y es el polinomio de grado menor o igual a 1 que mejor aproxima a F cerca de (x_0, y_0, z_0).

(2) Polinomio de orden 2 centrado en (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} P_2(x,y,z) &= F(x_0,y_0,z_0) + F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) \\ &+ \frac{1}{2}\Big[F_{xx}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 + 2F_{xy}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0) + \\ &\quad + 2F_{xz}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) + F_{yy}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2 + \\ &\quad + 2F_{yz}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0) + F_{zz}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2 \Big] . \end{aligned}$$

Además este polinomio está caracterizado por las igualdades:

$$\begin{aligned}
F(x_0, y_0, z_0) &= P(x_0, y_0, z_0) \\
F_x(x_0, y_0, z_0) &= (P_2)_x (x_0, y_0, z_0) \\
F_y(x_0, y_0, z_0) &= (P_2)_y (x_0, y_0, z_0) \\
F_z(x_0, y_0, z_0) &= (P_2)_z (x_0, y_0, z_0) \\
F_{xx}(x_0, y_0, z_0) &= (P_2)_{xx} (x_0, y_0, z_0) \\
F_{xy}(x_0, y_0, z_0) &= (P_2)_{xy} (x_0, y_0, z_0) \\
F_{xz}(x_0, y_0, z_0) &= (P_2)_{xz} (x_0, y_0, z_0) \\
F_{yx}(x_0, y_0, z_0) &= (P_2)_{yx} (x_0, y_0, z_0) \\
F_{yz}(x_0, y_0, z_0) &= (P_2)_{yz} (x_0, y_0, z_0) \\
F_{zz}(x_0, y_0, z_0) &= (P_2)_{zz} (x_0, y_0, z_0)
\end{aligned}$$

y es el polinomio de grado menor o igual a 2 que mejor aproxima a F cerca de (x_0, y_0, z_0).

Ejemplo: Dada $F(x, y, z) = x^2 y e^{x+z^2+1}$, calcular los polinomios de Taylor de F centrados en $(-1, 1, 0)$ de orden 1 y 2.

Para calcular los polinomios necesitamos las derivadas parciales hasta orden 2

$$\begin{aligned}
F_x(x, y, z) &= y \cdot \left(2xe^{x+z^2+1} + x^2 e^{x+z^2+1} \cdot 1\right) \\
F_y(x, y, z) &= x^2 e^{x+z^2+1} - 1 \\
F_z(x, y, z) &= x^2 y e^{x+z^2+1} \cdot 2z \\
F_{xx}(x, y, z) &= y \left(2e^{x+z^2+1} + 2xe^{x+z^2+1} + 2xe^{x+z^2+1} + x^2 e^{x+z^2+1}\right) \\
F_{xy}(x, y, z) &= F_{xy}(x, y, z) = 2xe^{x+z^2+1} + x^2 e^{x+z^2+1} & \text{(hicimos } (F_y)_x) \\
F_{xz}(x, y, z) &= F_{zx}(x, y, z) = 2yz \left[2xe^{x+z^2+1} + x^2 e^{x+z^2+1}\right] & \text{(hicimos } (F_z)_x) \\
F_{yy}(x, y, z) &= 0 \\
F_{yz}(x, y, z) &= F_{zy}(x, y, z) = x^2 e^{x+z^2+1} \cdot 2z \\
F_{zz}(x, y, z) &= 2x^2 y \left(e^{x+z^2+1} \cdot 2z \cdot z + e^{x+z^2+1} \cdot 1\right)
\end{aligned}$$

Ahora evaluamos:

$$\begin{aligned}
F(-1, 1, 0) &= 1 \\
F_x(-1, 1, 0) &= -1 \\
F_y(-1, 1, 0) &= 1 \\
F_z(-1, 1, 0) &= 0 \\
F_{xx}(-1, 1, 0) &= -1 \\
F_{xy}(-1, 1, 0) &= -1 \\
F_{xz}(-1, 1, 0) &= 0 \\
F_{yy}(-1, 1, 0) &= 0 \\
F_{yz}(-1, 1, 0) &= 0 \\
F_{zz}(-1, 1, 0) &= 2
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
P_1(x, y, z) &= F(-1, 1, 0) + F_x(-1, 1, 0)(x - (-1)) + F_y(-1, 1, 0)(y - 1) + F_z(-1, 1, 0)(z - 0) \\
&= 1 - (x + 1) + (y - 1) = x - x - 1 + y - 1 \\
&= -x + y - 1.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_2(x,y,z) = {} & F(-1,1,0) + F_x(-1,1,0)(x+1)F_y(-1,1,0)(y-1) + F_z(-1,1,0)z \\
& + \frac{1}{2}F_{xx}(-1,1,0)(x+1)^2 + F_{xy}(-1,1,0)(x+1)(y-1) \\
& + F_{xz}(-1,1,0)(x+1)z + \frac{1}{2}F_{yy}(-1,1,0)(y-1)^2 \\
& + F_{yz}(-1,1,0)(y-1)z + \frac{1}{2}F_{zz}(-1,1,0)z^2 \\
= {} & 1 - (x+1) + (y-1) + \frac{1}{2}\cdot(-1)(x+1)^2 + \\
& + (-1)(x+1)(y-1) + 0\cdot(x+1)z + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot(y-1)^2 + 0\cdot(y-1)z + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot z^2 \\
= {} & -x + y - 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2 - (x+1)(y-1) + z^2
\end{aligned}
$$

2. Máximos y mínimos de funciones de una variable (repaso)

Definición: dada $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$, decimos que f tiene o alcanza un *mínimo local* en x_0 si existe un intervalo alrededor de x_0 que está contenido en (a,b), es decir un (c,d) tal que $x_0\in(c,d)\subseteq(a,b)$ tal que

$$f(x)\geq f(x_0)\ \text{ para todo } x\in(c,d).$$

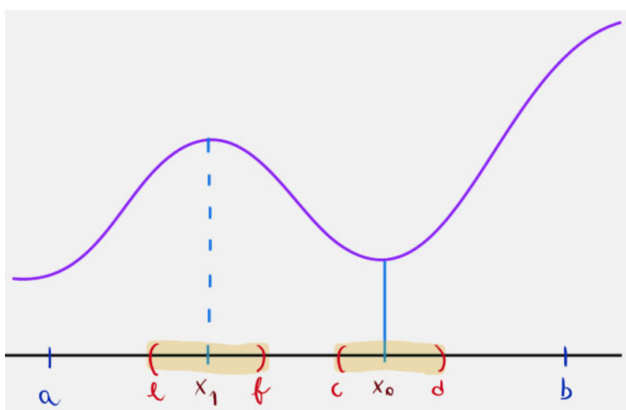
También en este caso se dice que x_0 es un *mínimo local* de f.

Decimos que f tiene o alcanza un *máximo local* en x_1 si existe un intervalo alrededor de x_1 contenido en (a,b), es decir un (e,f) tal que $x_1\in(e,f)\subseteq(a,b)$ tal que

$$f(x)\leq f(x_1)\ \text{ para todo } x\in(e,f).$$

También en este caso se dice que x_1 es un *máximo local* de f.

Decimos que f tiene un *extremo local* en en punto p, si p es un máximo o un mínimo local de f. Gráficamente:



Dada $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, ¿cómo buscamos candidatos a máximos y mínimos?

Gráficamente vemos que si p es un extremo local (máximo o mínimo local) entonces la recta tangente en ese punto es un recta horizontal (es decir, la derivada en p vale 0). En general vale el siguiente resultado:

Teorema de Fermat: Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es un función derivable (es decir, hay recta tangente) y $p\in(a,b)$ es un extremo local entonces $f'(p)=0$.

A los puntos p donde $f'(p)=0$ se los llama *puntos críticos*.

Dada f derivable, para buscar extremos locales, por el teorema de Fermat buscamos los ceros de la derivada.

Una vez que tenemos los ceros de la derivada, ¿cómo sabemos si realmente es máximo o mínimo?

Ejemplo: Si $f(x)=e^{x^3-12x}$, entonces $f'(x)=e^{x^3-12x}\cdot\left(3x^2-12\right)=0$ si y sólo si $3x^2-12=0$ de donde $x^2=4$. Por lo tanto $x=2$ ó $x=-2$.

¿Son máximos o mínimos?

Podemos mirar el signo de la derivada y ver si:

Si f pasa de crecer a decrecer en p, entonces p es máximo local.

Si f pasa de decrecer a crecer un p, entonces p es mínimo local.

También tenemos el siguiente resultado usando la derivada segunde.

Criterio de la derivada segunda: si f es dos veces derivable y p es un punto critico de f (es decir $f'(p) = 0$) y además:

- $f''(p) > 0 \quad \Rightarrow \quad p$ es mínimo local
- $f''(p) < 0 \quad \Rightarrow \quad p$ es máximo local
- $f''(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ no sabemos.

Volvemos a la función$f(x) = e^{x^3-12x}$:
vimos que $f'(x) = e^{x^3-12x} \cdot \left(3x^2 - 12\right) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = e^{x^3-12x}\left(3x^2-12\right)^2 + e^{x^3-12x}(6x)$.
Vimos que 2 y -2 son puntos críticos. Además

$$f''(2) = e^{8-24} \cdot 12 > 0 \implies 2 \text{ es mínimo local}$$

y

$$f''(-2) = e^{-8+24} \cdot (-12) < 0 \implies -2 \text{ es máximo local.}$$

2.1. Idea de por qué funciona el criterio de la derivada segunda.

Es por usar Taylor. Veamos por qué.

Si $P_2(x)$ es el polimomio de Taylor de f centrado en p, tenemos que

$$f(x) \approx P_2(x) \text{ cerca de } p$$

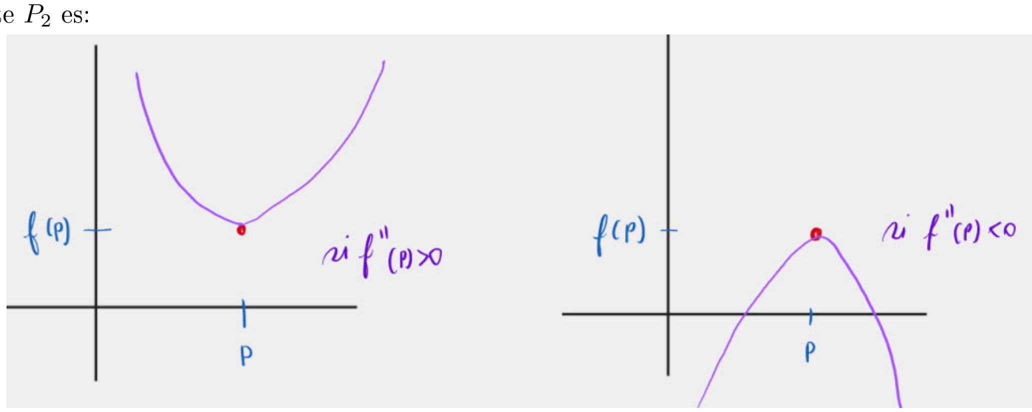
y

$$P_2(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + f''(p)(x-p)^2$$

Si además $f'(p) = 0$, tenemos

$$P_2(x) = f(p) + f''(p)(x-p)^2$$

Gráficamente P_2 es:



Con lo cual, si $f(x)$ se parece mucho a $P_2(x)$ tenemos lo que queríamos.