CLASE 13. POLINOMIO DE TAYLOR EN DOS VARIABLES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Polinomio de Taylor

Recordemos de la clase pasada:

Dada $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tal que existen $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ entonces el polinomio de Taylor de f centrado en (o alrededor de) x_0 de orden n es el polinomio de grado menor o igual a n dado por:

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Este polinomio cumple que

$$\begin{aligned} P_{n,x_0}(x_0) &= f(x_0) \\ P'_{n,x_0}(x_0) &= f'(x_0) \\ P''_{n,x_0}(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ P^{(n)}_{n,x_0}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Además se cumple que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ejemplo: Dada $f(x) = e^{x-1}$, Calcular el polinomio de Taylos de f de orden n centrado en $x_0 = 1$. Dar aproximaciones de $e^{-0.1}$ usando P_3 y P_4.

Resolución: calculamos primero las derivadas de f:

$$f(x) = e^{x-1}, \quad f'(x) = e^{x-1}, \quad \cdots \quad f^{(n)}(x) = e^{x-1}.$$

Entonces

$$f(1) = f'(1) = \cdots = f^{(n)}(1) = e^0 = 1.$$

Entonces el polinomio buscado es

$$P_{n,1}(x) = 1 + 1 \cdot (x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3!}(x - 1)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(x - 1)^n.$$

En particular,

$$\begin{aligned} P_3(0.9) &= 1 + (0.9 - 1) + \frac{1}{2}(0.9 - 1)^2 + \frac{1}{3!}(0.9 - 1)^3 \\ &= 1 - 0.1 + \frac{1}{2}(0.01) - \frac{1}{6}(0.001) \\ &= 0.9048333... \end{aligned}$$

$$P_4(0.9) = P_3(0.9) + \frac{1}{4!}(0.9 - 1)^4 \cong 0.9048375.$$

Si usamos le calculadora $e^{-0.1} \simeq 0.9048374\ldots$, entonces

$$\begin{aligned} e^{-0.1} - P_3(0.9) &\simeq 0.000004 = 4 \times 10^{-6} \\ e^{-0.1} - P_4(0.9) &\simeq 0.0000002 = 2 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

Si quisiera un error menor que 10^{-10} ¿sé a priori hasta que orden de polinomio de Taylor necesito?

2. Error de aproximación

Dada f, si P_{n,x_0} es el polimomio de Taylor de f centiado en x_0, el error que cometemos al hacer $P_{n,x_0}(x)$ en lugar de $f(x)$ cerca de x viene dado por

$$|f(x) - P_{n,x_0}(x)|$$

Si llamanos $R_n, x_0(x)$ al resto:

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x)$$

de manera que

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x),$$

entonces

$$\text{Error } = |R_{n,x_0}(x)|.$$

3. Resto de Taylor

Dada $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ y f que tiene hasta derivada $n+1$ en x_0, si $P_{n,x_0}(x)$ es el polinomio de Taylor de f centrado en x_0 de orden n, entonces

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

donde c es un punto desconocido entre x_0 y x.

Ejemplo: Para $f(x) = e^{x-1}$ queremos aproximar $e^{-0.1}$ con error menor que 10^{-10}. Entonces queremos n para que el polinomio de Taylor de f centrado un 1 de orden n satisfaga que

$$|f(0.9) - P_{n,1}(0.9)| < 10^{-10}$$

es decir queremos que

$$|R_{n,1}(0.9)| < 10^{-10}$$

Usando le fórmula para el error dada arriba

$$R_{n,1}(0.9) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(0.9 - 1)^{n+1}$$

con c entre 0.9 y 1.

Como $f^{(n+1)}(x) = e^{x-1}$ siempre, tenemos que

$$R_{n,1}(0.9) = \frac{e^{c-1}(-0.1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

con $c \in [0.9, 1]$. Entonces

$$|R_{n_1}(0.9)| = \frac{\left|e^{c-1}\right| |(-0.1)|^{n+1}}{|(n+1)!|} = \frac{e^{c-1}(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde hemos usado que $e^{c-1} \leq e^0 < 1$ porque $c \in [0.9, 1]$.

Vemos que si $n = 5$

$$\frac{3\left(\frac{1}{10}\right)^6}{6!} \simeq 4 \times 10^{-8}$$

si $n = 6$

$$\frac{3\left(\frac{1}{10}\right)^7}{7!} \simeq 5 \times 10^{-11} < 10^{-10}$$

Entonces tendremos que desarrollar el polinomio de Taylor hasta orden 6.

4. Derivadas de orden superior

Dada $F(x,y)=x^3y+2x-y^4$ vimos que F es diferenciable y

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=3x^2y+2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x^3-4y^3$$

donde $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ son dos nuevas funciones de dos variables, entonces ¿las puedo volver a derivar? veo que ambas son polinomios y por lo tanto diferenciables, luego puedo calcular sus derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,y)=6xy, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,y)=3x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x,y)=3x^2 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x,y)=-12y^2.$$

A estas derivados se los llama *derivadas segundas* y se usan las siguientes notaciones

$$(F_x)_x=F_{xx}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$
$$(F_x)_y=F_{xy}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$
$$(F_y)_x=F_{yx}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$
$$(F_y)_y=F_{yy}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Observemos que en el ejemplo anterior

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,y)=3x^2=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y).$$

A estas derivadas se las llama derivadas segundas cruzados (porque derivamos una vez respecto de cada variable).

Teorema: si $F:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tiene ambas derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$, y son continuas en D, entonces son iguales para todo $(x,y)\in D$. Es decir $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,y)$.

5. Polinomios en dos variables

Un polinomio $P(x,y)$ es una función que es suma de términos de la forma

$$\alpha x^n y^m \quad n,m\in\mathbb{N}_0.$$

Ejemplo: $2x^3y, 3x^4, -5y^5, x^{19}y^7, \ldots$

El grado de cada término $\alpha x^n y^m$ es $n+m$.

Ejemplo:

$$\mathrm{gr}\left(2x^3y\right)=3+1=4$$
$$\mathrm{gr}\left(3x^4\right)=4+0=4$$
$$\mathrm{gr}\left(-5y^5\right)=5$$
$$\mathrm{gr}\left(x^{10}y^7\right)=17.$$

El *grado* de un polinomio es el máximo de los grados de cada uno de sus términos.

Ejemplo: $P(x,y)=\underbrace{2x^3y}_{gr=4}+\underbrace{3x^4}_{gr=4}-\underbrace{5y^5}_{gr=5}+\underbrace{x^{10}y^7}_{gr=17}$ entonces $\mathrm{gr}(P)=17$.

Un polinomio de grado menor o igual a 1 tiene la expresión:

$$P(x,y)=a+bx+cy$$

con a,b,c números reales(es un plano!).

Un polinomio de grado menor o igual a 2 tiene la expresión:

$$Q(x,y)=a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2$$

con a,b,c,d,e,f números reales.

6. Polinomio de Taylor de dos variables

Vimos hasta ahora como aproximar una función de dos variable $F(x,y)$ cerca de un punto del gráfico $(x_0,y_0,F(x_0,y_0))$ por el plano tangente al gráfico de F en ese punto. Este plano tiene la expresión

$$z=\underbrace{F(x_0,y_0)}_{\text{es un número}}+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\text{es un número}}(x-x_0)+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\text{es un número}}(y-y_0).$$

Entonces vemos que el plano tangente es um polinomio de grado menor o igual a 1 que será el polinomio de Taylor de orden 1.

Se tiene lo siguiente:

Polinomio de orden 1: El polinomio de Taylor de orden 1 de F alrededor de (x_0,y_0) viene dado por

$$P_1(x,y)=F(x_0,y_0)+\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

que tiene grado menor o igual a 1 y es el plano tangente al gráfico de F en (x_0,y_0).

Además, es el polinomio de grado menor o igual a 1 que mejor aproxima a la función cerca de (x_0,y_0).

Por último, el polinomio de Taylor de orden 1 de F en (x_0,y_0) es el único polinomio de grado menor o igual a 1 que satisface

$$\begin{aligned}F(x_0,y_0)&=P_1(x_0,y_0)\\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)&=\frac{\partial P_1}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)&=\frac{\partial P_1}{\partial y}(x_0,y_0).\end{aligned}$$

Polinomio de orden 2: El polinomio de Taylor de orden 2 de F alrededor de (x_0,y_0) viene dado por:

$$\begin{aligned}P_2(x,y)=F(x_0,y_0)&+\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\ &+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]\end{aligned}$$

que tiene grado menor o igual a 2 y es al polinomio de grado menor o igual a 2 que mejor aproxima a F cerca de (x_0,y_0).

Por último, el polinomio de Taylor de orden 2 de F en (x_0,y_0) es el único polinomio de grado menor o igual a 2 que satisface

$$\begin{aligned}F(x_0,y_0)&=P_2(x_0,y_0)\\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)&=\frac{\partial P_2}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)&=\frac{\partial P_2}{\partial y}(x_0,y_0).\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)&=\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)&=\frac{\partial^2 P_2}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)&=\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}(x_0,y_0).\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 y 2 de $F(x,y)=e^{x-y}$ alrededor de $(0,0)$.

Primero calculamos las derivadas hasta grado 2:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=e^{x-y} &&\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=1\\
&\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=e^{x-y}\cdot(-1) &&\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=-1\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=e^{x-y} &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)=1\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=e^{x-y}(-1) &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(0,0)=-1\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=e^{x-y} &&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0)=1
\end{aligned}$$

Además $F(0,0)=1$.

Entonces el polinomio de Taylor de orden 1 (es decir, el plano tangente) es:

$$\begin{aligned}
P_1(x,y) &= F(0,0)+\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)(y-0)\\
&=1+1\cdot x-1\cdot y=1+x-y.
\end{aligned}$$

y el polinomio de Taylor de orden 2 es:

$$\begin{aligned}
P_2(x,y)=F(0,0)&+\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)(y-0)\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(0,0)(x-0)(y-0)\ +\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0)(y-0)^2\right]\\
&=1+x-y+\frac{1}{2}\left[1\cdot x^2+2(-1)x-y+1y^2\right]\\
&=1+x-y+\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo: Dada $F(x,y)=\ln(xy+x-y)$, calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de F centrado en $(1,-1)$ y usar ese polinomio para dar una aproximación de $F(1.1,-1.2)$.

Primero calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned}
F_x(x,y)&=\frac{1}{xy+x-y}\cdot(y+1) \quad \Rightarrow \quad F_x(1,-1)=0\\
F_y(x,y)&=\frac{1}{xy+x-y}\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad F_y(1,-1)=0\\
F_{xx}(x,y)&=\frac{(y+1)\cdot(-1)}{(xy+x-y)^2}\cdot(y+1)=\frac{-(y+1)^2}{(xy+x-y)^2} \quad \Rightarrow \quad F_{xx}(1,-1)=0\\
F_{xy}(x,y)&=\frac{(xy+x-y)-(y+1)(x-1)}{(xy+x-y)^2}=\frac{xy+x-y-(xy-y+x-1)}{(xy+x-y)^2}=\frac{1}{(xy+x-y)^2} \quad \Rightarrow \quad F_{xy}(1,-1)=1\\
F_{yy}(x,y)&=(x-1)\frac{(-1)}{(xy+x-y)^2}\cdot(x-1)=\frac{-(x-1)^2}{(xy+x-y)^2} \quad \Rightarrow \quad F_{yy}(1,-1)=0
\end{aligned}$$

Además $F(1,-1)=\ln(1)=0$. Entonces

$$\begin{aligned}
P_2(x,y)&=F(1,-1)+\frac{\partial F}{\partial x}(1,-1)(x-1)+\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1)(y+1)\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(1,-1)(x-1)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(1,-1)(x-1)(y+1)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(1,-1)(y+1)^2\right]\\
&=0+0\cdot(x-1)+0\cdot(y+1)+\frac{1}{2}\left[0\cdot(x-1)^2+2(x-1)(y+1)+0\cdot(y+1)^2\right]\\
&=(x-1)(y+1).
\end{aligned}$$

Para das una aproximación de $F(1.1,-1.2)$ usamos $P_2(1.1,-1.2)$. Entonces

$$F(1.1,-1.2) \simeq P_2(1.1,-1.2) = (1.1-1)(-1.2+1) = (0.1)(-0.2) = -0.02.$$

Observar que el $F(1.1,-1.2) = -0.0202027....$