CLASE 12. DIRECCIONES DE CRECIMIENTO. POLINOMIO DE TAYLOR

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Dirección de más rápido crecimiento y decrecimiento

Queremos determinar ahora para qué dirección $\vec{v}$, la derivada direccional es mayor.

Para poder comparar vamos a tomar todos $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ con $\|\vec{v}\| = 1$, y queremos determinar $\vec{v}$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \qquad \text{sea máximo.}$$

Aquí $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable dada y $(x_0, y_0) \in A$.

¿Cuál es $\vec{v}$ con $\|\vec{v}\| = 1$ tal que $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ es máximo?

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) &= \langle \nabla F(x_0, y_0), \vec{v} \rangle \\ &= \|\nabla F(x_0, y_0)\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo entre $\nabla F(x_0, y_0)$ y $\vec{v}$, siendo $\theta \in [0, \pi]$.

Como $\|\vec{v}\| = 1$ tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \underbrace{\|\nabla F(x_0, y)\|}_{\substack{\text{no cambia} \\ \text{con } \vec{v}}} \quad \underbrace{\cos\theta}_{\substack{\text{depende} \\ \text{de } \vec{v}}}$$

Observar que $\cos\theta$ toma su valor máximo en $[0, \pi]$ cuando $\theta = 0$. Entonces, $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ será máximo si el ángulo entre $\vec{v}$ y $\nabla F(x_0, y_0)$ es cero, es decir $\vec{v} = k \cdot \nabla F(x_0, y_0)$ con $k > 0$, (es decir, $\vec{v}$ y $\nabla F(x_0, y_0)$ tienen la misma dirección y sentido). Como $\|\vec{v}\| = 1$, nos queda

$$\vec{v} = \frac{\nabla F(x_0, y_0)}{\|\nabla F(x_0, y_0)\|}.$$

Es decir, la dirección $\vec{v}$ donde $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ es máxima, es la dirección del gradiente.

De le misma manera se muestra que la dirección $\vec{v}$ con $\|\vec{v}\| = 1$ donde $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ es mínima es la dirección

$$\vec{v} = -\frac{\nabla F(x_0, y_0)}{\|\nabla F(x_0, y_b)\|}$$

¿Por qué aparece $\|\nabla F(x_0, y_0)\|$ dividiendo?

Observemos que dado un vector cualquiera (a, b), si hacemos $\frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}$ tendremos que este nuevo vector tiene norma o módulo 1.

Por ejemplo, si $(a, b) = (1, 1)$ tenemos $\|(1, 1)\| = \sqrt{2}$, entonces $\frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un vector que tiene la misma dirección y sentido que $(1, 1)$ pero tiene norma (o módulo) 1.

Es más, si θ es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\nabla F(x_0, y_0)$, y es:

- $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla F(x_0, y_0)\| \, \|v\| \underbrace{\cos\theta}_{>0} > 0$

(que es lo mismo que ver que $\langle \nabla F(x_0, y_0), v \rangle > 0$).

Entonces $\vec{v}$ es una dirección de crecimiento.

- $\theta \in (\pi/2, \pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla F(x_0, y_0)\| \, \|v\| \underbrace{\cos\theta}_{<0} < 0$

(que es lo mismo que ver que $\langle \nabla F(x_0,y_0), v\rangle < 0$).
Entonces $\vec{v}$ es una dirección de decrecimiento.

Ejemplo: Supongamos que estamos en una montaña cuya superficie viene dada por al gráfico de la función

$$F(x,y) = 1 + e^{-\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{100}}$$

donde x es la latitud sur, y es la longitud oeste, y $F(x,y)$ represente la altura en miles de metros.

(1) Si me encuentro en la montaña con 20°S de latitud y 10°W de longitud ¿a qué altura me encuentro?
(2) Dar una parametrización de la curva de nivel $1+e^{-3}$.
Dar dos pares ordenados de (latitud, longitud) para los cuales la altura de la montaña sea $1+e^{-3}$.
(3) Si me encuentro en el punto del item 1) y suena una alarma de Tsunami ¿en qué dirección tengo que corren (en latitud y longitud) si quiero subir en altura lo más rápido posible?

Respustas:

(1) $F(20,10) = 1 + e^{-\frac{20^2}{400}-\frac{10^2}{100}} = 1+e^{-3}$. Estaré a $1000\left(1+e^{-3}\right)$ metros de altura.

(2) La curva de nivel es $S_{1+e^{-3}} = \left\{(x,y) : 1 + e^{-\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{100}} = 1+e^{-3}\right\}$, y tenemos que

$$\begin{aligned} 1 + e^{-\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{100}} = 1+e^{-3} &\Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{10}} = e^{-3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{100} = -3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{100} = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{3\cdot 400} + \frac{y^2}{3\cdot 100} = 1 \quad \text{(es una elipse)} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{3}\cdot 20}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}\cdot 10}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Una parametrización será

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3}\cdot 20\cdot\cos t \\ y &= \sqrt{3}\cdot 10 \operatorname{sen} t \end{aligned}, \qquad t\in[0,2\pi].$$

(3) El punto del gráfico de F es $\left(20,10,1+e^{-3}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y) &= \left(e^{\frac{-x^2}{400}-\frac{y^2}{100}}\left(\frac{-2x}{400}\right), e^{\frac{-x^2-y^2}{100}}\left(\frac{-2y}{100}\right)\right) \\ \nabla F(20,10) &= \left(e^{-3}\left(\frac{-40}{400}\right), e^{-3}\left(\frac{-20}{100}\right)\right) \\ &= \frac{-e^{-3}}{10}(1,2) \end{aligned}$$

además $\|\nabla F(20,10)\| = \frac{e^{-3}}{10}\sqrt{5}$. Entonces la dirección de más rápido crecimiento es

$$\frac{\nabla F(20,10)}{\|\nabla F(20,10)\|} = \frac{-\frac{e^{-3}}{10}(1,2)}{\frac{e^{-3}}{10}\sqrt{5}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Teorema: Dada $F : D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable, $(x_0,y_0)\in D$, la dirección de más rápido crecimiento de F en (x_0,y_0) viene dada por $\vec{v} = \frac{\nabla F(x_0,y_0)}{\|\nabla F(x_0,y_0)\|}$.
Esta dirección me da la tasa de cambio máxima:

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\nabla F(x_0,y_0)}{\|\nabla F(x_0,y_0)\|}\right)}(x_0,y_0) = \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \frac{\nabla F(x_0,y_0)}{\|\nabla F(x_0,y_0)\|}\right\rangle = \|\nabla F(x_0,y_0)\|.$$

2. Polinomio de Taylor en un a variable

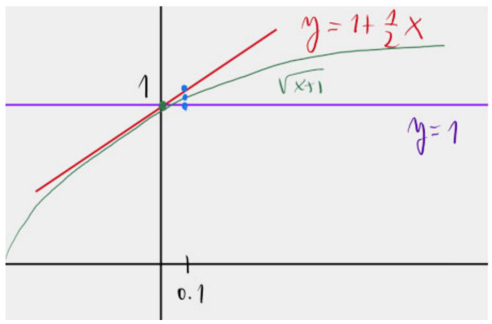
Dada $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in I$, vimos que si f es derivable en x_0, entonces la recta tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la mejor aproximación lineal de f cerca de x_0 en el sentido que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = 0.$$

Ejemplo: Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, entonces $f(0) = \sqrt{1} = 1$ y $f(0.1) = \sqrt{1.1}$ ¿Cómo doy una aproximación sin usar la calculadora?

Una primera aproximación es decir que como 0.1 se parece a 0, entonces $f(0.1) = \sqrt{1.1}$ se debería parecer a $f(0) = 1$.

Gráficamente



Una mejor aproximación es usar la recta tangente en $x_0 = 0$, calculamos

$$f(0) = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

La recta tangente al gráfico de f en $(0, f(0)) = (0, 1)$ es:

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 1 + \frac{1}{2}x.$$

Para dar una aproximación de $f(0.1)$ usamos la recta tangente y hacemos $1 + \frac{1}{2}(0.1) = 1 + 0.05 = 1.05$

Si usamos la calculador a vemos que

$$\sqrt{1.1} \simeq 1.0488088\ldots$$

Es decir, le recta tangente nos de una mejor aproximación que antes con $\sqrt{1} = 1$.

Hasta acá vimos entonces:

- Aproximación constante, es un polinomio de grado 0 constante dado por $P_0(x) = f(0)$.
- Aproximación lineal (recta tangente), es un polinomio de grado menor o igual a 1 que llamamos

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x$$

cumple que

$$P_1(0) = f(0) \qquad \text{y} \qquad P_1'(0) = f'(0).$$

Para conseguir una mejor aproximación que la recta tangente buscamos ahora un polinomio de grado menor o igual a 2 que cumpla

$$P_2(0) = f(0), \quad P_2'(0) = f'(0) \quad \text{y} \quad P_2''(0) = f''(0).$$

Entonces

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad P_2'(x) = 2ax + b, \qquad P_2''(x) = 2a$$

$$P_2(0) = c = f(0)$$

$$P_2'(0) = b = f'(0)$$

$$P_2''(0) = 2a = f''(0) \quad \rightarrow \quad a = \frac{f''(0)}{2}$$

Por lo tanto el polinomio buscado será

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Ejemplo: Seguimos con la f del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+x} \quad \to \quad f(0)=1 \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \quad \to \quad f'(0)=\frac{1}{2} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \quad \to \quad f''(0) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P_2(x) = \underbrace{1+\frac{1}{2}x}_{P_1(x)} - \frac{1}{8}x^2.$$

Usamos ese polinomio para dar una nueva aproximación de $f(0.1)=\sqrt{1.1}$. Calculamos

$$P_2(0.1) = 1+\frac{1}{2}(0.1)-\frac{1}{8}(0.1)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad P_2(0.1)=1.04875.$$

Ahora tiene 3 dígitos correctos!

Si repetimos las cuentas para grado menor o igual que 3, tendremos

$$P_3(x) = f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}.$$

Ejemplo: sugiendo con el ejemplo anterior, ahora $f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$ y $f'''(0)=\frac{3}{8}$. Esto da

$$P_3(x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

$$P_3(0.1) = 1+\frac{1}{2}(0.1)-\frac{1}{8}(0.1)^2+\frac{1}{16}(0.1)^3 \qquad \Longrightarrow \qquad P_3(0.1)=1.0488125.$$

Ahora tiene 4 dìgitos correctos.

Recordar que:

$$\begin{aligned}
1! &= 1 \\
2! &= 2\cdot 1 = 2 \\
3! &= 3\cdot 2\cdot 1 = 6 \\
&\vdots \\
n! &= n(n-1)(n-2)\cdots 1
\end{aligned}$$

Dada una función de 1 variable, se define la derivada n-ésima de f y se escribe $f^{(n)}(x)$.

Ejemplo: Para la función $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \cos(x) \\
&f''(x) = -\operatorname{sen}(x) \\
&f'''(x) = -\cos(x) \\
&f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x) \\
&f^{(4k+1)}(x) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{para cualquier k}
\end{aligned}$$

3. Polinomio de Taylor centrado en 0

Dada $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $0 \in I$, si f se puede derivar n veces en 0 (esto es, existen $f(0), f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$), se define el polinomio de Taylor de f centrado en 0 de orden n como el polinomio de grado menor o igual a n dado por:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Este polinomio es único y es aquel que cumple:

$$\begin{aligned} P_n(0) &= f(0) \\ P_n'(0) &= f'(0) \\ P_n''(0) &= f''(0) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

Además, se prueba que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0$$

Ejemplo: Hallar los polinomios de Taylos de $f(x) = \sin x$ centrados en 0 de orden $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Respuesta: calculamos las derivadas

$$\begin{array}{lll} f(x) = \operatorname{sen} x, & f''(x) = -\operatorname{sen} x, & f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x \\ f(x) = \cos x, & f^{(3)}(x) = -\cos x, & f^{(5)}(x) = \cos x \end{array}$$

y las evaluamos en 0

$$f(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f^{(3)}(0) = -1 \quad f^{(5)}(0) = 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 0 \\ P_1(x) &= 0 + 1 \cdot x = x \\ P_2(x) &= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2}x^2 = x \\ P_3(x) &= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3 \\ P_4(x) &= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 = x - \frac{1}{6}x^3 \\ P_5(x) &= 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \end{aligned}$$

Graficar f junto con $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ en Geogebra. (cerca del 0).

4. Polinomio de Taylor de f centrado en x_0

De manera similar, podemos construir polinomios que aproximen a una f cerca de un x_0 arbitrario donde existan $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots f^{(n)}(x_0)$.

Dada $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tal que existen $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ entonces el polinomio de Taylor de f centrado en (o alrededor de) x_0 de orden n es el polinomio de grado menor o igual a n dado por:

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Este polinomio cumple que

$$\begin{aligned}
P_{n,x_0}(x_0) &= f(x_0)\\
P'_{n,x_0}(x_0) &= f'(x_0)\\
P''_{n,x_0}(x_0) &= f''(x_0)\\
&\vdots\\
P^{(n)}_{n,x_0}(x_0) &= f^{(n)}(x_0).
\end{aligned}$$

Cuidado: no vale que $P_{n,x_0}(x) = f(x)$ en todo x, es falso eso! (solo vale para $x = x_0$).

Además se cumple que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Observación: Si $n = 1$, P_{1,x_0} es la recta tangente al gráfico de f en $(x_0, f(x_0))$.

Ejemplo: Dada $f(x) = e^{x-1}$, calcular los polinomios de Taylor de f alrededor de $x_0 = 1$ de orden $1, 2$ y 3.

Solución: Vamos a necesitar

$$f'(x) = e^{x-1}, \quad f''(x) = e^{x-1}, \quad f''(x) = e^{x-1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P_{1,1}(x) &= f(1) + f'(1)(x-1)\\
&= 1 + (x-1) \qquad \text{(es la recta tangente en } x_0 = 1\text{)}\\
P_{2,1}(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2}\\
&= 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2\\
P_{3,1}(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2} + \frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!}\\
&= 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3.
\end{aligned}$$