CLASE 11. REGLA DE LA CADENA. DERIVADAS DIRECCIONALES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Regla de la cadena

Vimos que componer funciones diferenciables resulta diferenciable.

Profundicemos sobre esto último.

Recordemos la regla de la cadena para funcionas de una variable.

Dadas f, g funciones derivables de una variable, se tiene gue

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ejemplo: Calcular $(\sin(x^2))'$.

Aquí se tiene la composición de $f(x) = \sin x$ y $g(x) = x^2$. Entonces

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Para más variables, ya vimos las composiciones

$$\begin{aligned} &A \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R} \\ &(x, y) \to F(x, y) \to h(F(x, y)) \end{aligned}$$

Ejemplo: La función $H(x, y) = e^{x^2+y^2}$ es la composición:

$$(x, y) \xrightarrow{F} x^2 + y^2 \xrightarrow{h} e^{x^2+y^2}$$

con $F(x, y) = x^2 + y^2$, $h(z) = e^z$

En este caso $h \circ F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(h \circ F)(x, y) &= h'(F(x, y)) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(h \circ F)(x, y) &= h'(F(x, y)) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Veremos también composiciones del tipo:

$$t \to (x(t), y(t)) \to F(x(t), y(t)).$$

Para esto, usamos las funciones σ y F dadas por

$$I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

que actua como sigue:

$$t \longrightarrow \sigma(t) = (x(t), y(t)) \to F(x(t), y(t)).$$

Si σ es derivable (cada coordenadas lo es), entonces

$$\sigma'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Si F es diferenciable, entonces existen $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

En ese caso, $F \circ \sigma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y su derivada es

$$\begin{aligned}(F\circ\sigma)'(t) &= \langle \nabla F(\sigma(t)), \sigma'(t)\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x(t),y(t)), \frac{\partial F}{\partial y}(x(t),y(t))\right), (x'(t),y'(t))\right\rangle \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot y'(t)\end{aligned}$$

Ejemplo: Dada $H(x,y) = e^{x^2+y^2}$,calcular $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)$.

Podemos ver a H como la composición $H(x,y) = h(z(x,y))$ donde $h(z) = e^z$, $z(x,y) = x^2+y^2$.

Ojo! $z = z(x,y)$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= h'(z)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = e^{z(x,y)}2x = e^{x^2+y^2}2x \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) &= h'(z)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = e^{z(x,y)}2y = e^{x^2+y^2}2y\end{aligned}$$

Ejemplo: Dadas $\sigma(t) = \left(t^2+1, 2t\right)$ y $F(x,y) = x^2y$, calcular $(F\circ\sigma)(t)$ y $(F\circ\sigma)'(t)$.

Primero, observar que

$$\sigma(t) = (\underbrace{t^2+1}_{x(t)}, \underbrace{2t}_{y(t)})$$

entonces

$$(F\circ\sigma)(t) = F(\sigma(t)) = F(x(t),y(t)) = F\left(t^2+1, 2t\right) = \left(t^2+1\right)^2(2t)$$

y así

$$(F\circ\sigma)'(t) = 2\left(t^2+1\right)2t2t + \left(t^2+1\right)2$$

donde hemos usado la regla del producto.

Si hacemos la regla de la cadena

$$(F\circ\sigma)'(t) = \langle \nabla F(x(t),y(t)), (x'(t),y'(t))\rangle$$

debe dar lo mismo!

Como $F(x,y) = x^2$, entonces $\nabla F(x,y) = \left(2xy, x^2\right)$ y así

$$\nabla F(x(t),y(t)) = \nabla F\left(t^2+1,2t\right) = \left(2\left(t^2+1\right)2t, \left(t^2+1\right)^2\right)$$

además, $\left(x^2(t), y'(t)\right) = (2t,2)$, de donde tenemos que

$$(F\circ\sigma)'(t) = \langle \nabla F(x(t),y(t)), (x'(t),y'(t))\rangle = \left\langle \left(2\left(t^2+1\right)2t, \left(t^2+1\right)^2\right), (2t,2)\right\rangle = 2\left(t^2+1\right)2t2t + \left(t^2+1\right)^2 2$$

que es lo mismo que antes.

1.1. Consecuencia importante de la regla de la cadena. Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y supongamos que

$$S_c = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : F(x,y) = c\right\}$$

es realmente una curva, y que $\sigma(t), t\in I$ es una parametrización de esa curva, es decir

$$S_c = \{\sigma(t), t\in I\}.$$

Entonces $F(\sigma(t)) = c$ para todo $t \in I$. Esto nos da que $F\circ\sigma$ es una función constante en I. Como consecuencia,

$$(F\circ\sigma)'(t) = 0 \quad \text{para todo } t\in I.$$

y así, usando la regla de la cadena

$$\langle \nabla F(\sigma(t)), \sigma'(t)\rangle = 0. \tag{1.1}$$

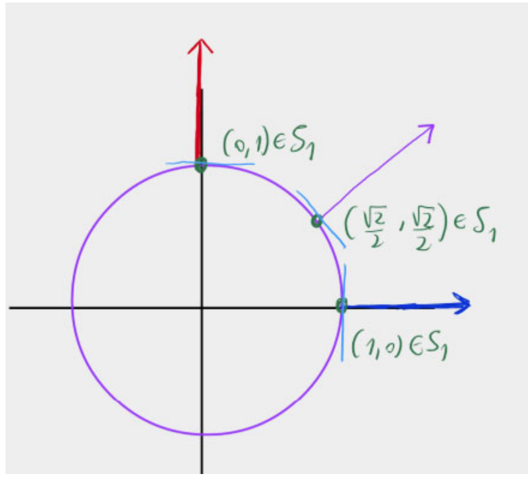
Si me paro ahora en un $t_0 \in I$ fijo donde

$$\nabla F\left(\sigma\left(t_0\right)\right) \neq (0,0) \qquad \text{y} \qquad \sigma'\left(t_0\right) \neq (0,0),$$

como $\sigma'(t_0)$ es tangente a la curva, (1.1) nos dice que $\nabla F\left(\sigma\left(t_0\right)\right)$ es perpendicular a $\sigma'\left(t_0\right)$, es decir $\nabla F\left(\sigma\left(t_0\right)\right)$ es normal a la curva S_c.

Ejemplo: Dada $F(x,y) = x^2 + y^2$, tenemos que

$$S_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$$



y además $\nabla_F(x,y) = (2x, 2y)$ por lo que

$$\nabla_F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \qquad \nabla F(1,0) = (2,0), \qquad \nabla F(0,1) = (0,2).$$

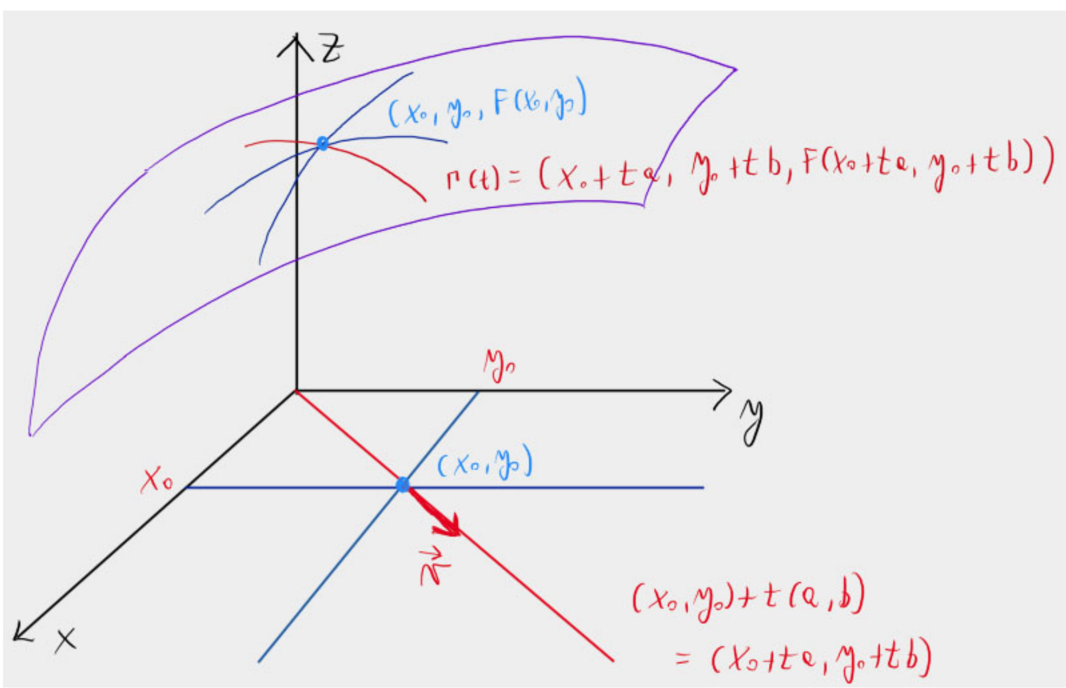
Por otro lado, dado $(1,1)$ ¿a qué curva de nivel pertenece? ¿Qué pasa con $\nabla F(1,1)$ respecto de esa curva de nivel?

Dicho de otra forma: dada $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$ si $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0,0)$ entonces $\nabla F(x_0, y_0)$ es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0).

Lo mismo pasa para $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

2. Derivadas direccionales

Recordar como definimos las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$.



Ahora elijo moverme por una dirección $\vec{v}$ cualquiera que no tiene por que ser paralela a los ejes ($(1,0)$ ó $(0,1)$). Tomamos $\vec{v} = (a,b)$ y $(x_0, y_0) + t(a,b)$ es una parametrización de la recta que tiene dirección (a,b) y pasa por (x_0, y_0) en $t = 0$.

Miramos la curva

$$\tilde{\sigma}(t) = (\underbrace{x_0 + at}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + bt}_{y(t)}, \underbrace{F(x_0 + at, y_0 + bt)}_{z(t)=F(x(t),y(t))})$$

que cumple que

$$\tilde{\sigma}(0) = (x_0, y_0, F(x_0, y_0))$$

donde $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$.

Queremos calcular $\tilde{\sigma}'(0)$. Tenemos:

$$x'(t) = a \quad \Rightarrow \quad x'(0) = a$$

$$y'(t) = b \quad \Rightarrow \quad y'(0) = b$$

$z'(0) = ???$ $\quad\Rightarrow\quad$ geométricamente es la coordenada que da la "inclinación" vertical.

En general no tiene por qué existir $z'(0)$, pero si F es diferenciable, entonces sí se puede y nos queda que, como

$$z(t) = F(x_0 + at, y_0 + bt) = F(x(t), y(t))$$

entonces

$$z'(t) = \langle \nabla F(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle \qquad \Rightarrow \qquad z'(0) = \langle \nabla F(\underbrace{x(0), y(0)}_{(x_0,y_0)}), \underbrace{(x'(0), y'(0))}_{(a,b)=\vec{v}} \rangle$$

$$= \langle \nabla F\left(x_0, y_0\right), \vec{v} \rangle$$

A esta derivada se la llama derivada direccional de F en la dirección $\vec{v}$ en el punto (x_0, y_0), y se escribe

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}\left(x_0, y_0\right) = \langle \nabla F\left(x_0, y_0\right), \vec{v} \rangle .$$

También se la conoce como tasa de cambio de F en le dirección $\vec{v}$ en el punto (x_0, y_0).

Ejemplo: Dada $F(x, y) = x^2 + y^2$ calcular $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0)$, $\frac{\partial F}{\partial v}(1, 0)$ para $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interpretar geométricamente.

Solución: Calculamos primero que $\nabla F(x, y) = (2x, 2y)$. Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0) = 2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 0$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(1, 0) = \left\langle \nabla F(1, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle = \left\langle (2, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle = \sqrt{2}.$$