CLASE 9. DIFERENCIABILIDAD

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Conjuntos de nivel. Repaso

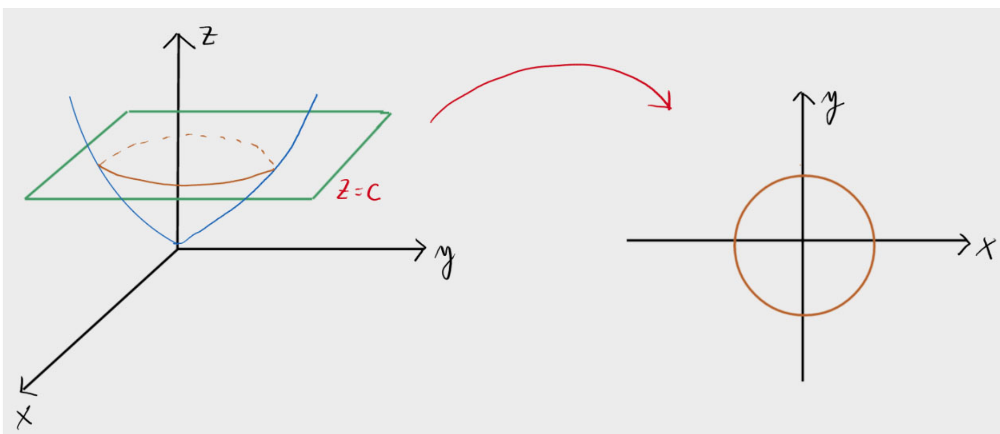
Repasamos lo que vimos la clase pasada;

Dade $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se definen las curros de nivel c de F como los conjuntos de $\mathbb{R}^2$ dados por:

$$S_c = \{(x, y) \in A : F(x, y) = c\}$$

Estos conjuntos serán típicamente curvas (aunque en algunos casos puedan dar “cosas raras").

Gráficamente consiste en la curva que es intersección del gráfico de F con el plano horizontal $z = c$ visto en el plano xy.



Ejemplo: $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ con $A = \{(x, y) : y \geqslant x^2\}$.

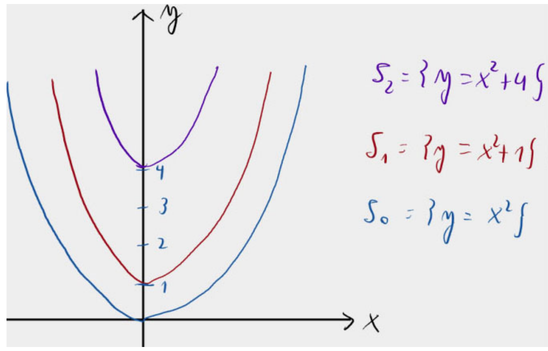
Tenemos

$$S_{-1} = \left\{(x, y) \in A : \sqrt{y - x^2} = -1\right\} = \emptyset$$

ya que la raíz cuadrada devuelve valores no negativos.

$$\begin{aligned}
S_0 &= \left\{(x, y) \in A : \sqrt{y - x^2} = 0\right\} \\
&= \{(x, y) \in A : \quad y - x^2 = 0\} \\
&= \{(x, y) : \quad y - x^2\} \\
S_1 &= \left\{(x, y) \in A : \sqrt{y = x^2} = 1\right\} \\
&= \{(x, y) \in A : y - x^2 = 1\} \\
&= \{(x, y) : y = x^2 + 1\}
\end{aligned}$$

Convencerse de que $S_c = \emptyset$ con $c < 0$ y $S_c = \{(x, y) : y = x^2 + c^2\}$ con $c \geqslant 0$.



Sabiendo además que

$$\operatorname{Dm} F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \geqslant x^2\right\}$$

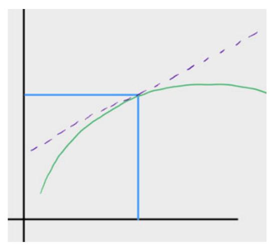
podemos darnos una idea de cómo es el gráfico de F. (Hacerlo en GeoGebra).

2. Diferenciabilidad de funciones de 2 y 3 variables

2.1. Repaso de funciones en una variable. En esta clase estudiaremos la diferenciabilidad de funciones de 2 y 3 variables, que es en concepto que generaliza le derivabilidad de funciones de 1 variable. Repasemos esto último.

Definición: Dada $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f se dice *derivable* en x_0 si:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existe.}$$



En caso de que exista se denote

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Tenemos una lista de funciones derivables y ya sabemos el cálculo de sus derivadas:

Función		derivada	
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f(x) = k$ cte	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f'(x) = 0$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f(x) = e^x$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f'(x) = e^x$
$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,	$f(x) = \ln(x)$	$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,	$f(x) = \ln(\lvert x \rvert)$	$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f(x) = \sin x$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f'(x) = \cos x$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f(x) = \cos x$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f'(x) = -\sin x$
$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Además valen las propiedades:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(k \cdot f)' = k \cdot f' \quad k \in \mathbb{R}$$
$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{si } g'(x) \neq 0.$$

Ejemplo: La función $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ es derivable en $\mathbb{R}$.
En general, cualquier polinomio es derivable en $\mathbb{R}$.

Si teníamos f derivable en x_0 podíamos calcular la recta tangente al gráfico de f en $(x_0, f(x_0))$ donde $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente, y por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$L: \quad y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Se puede probar que $L(x)$ es la única recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ que satisface que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0.$$

Es decir

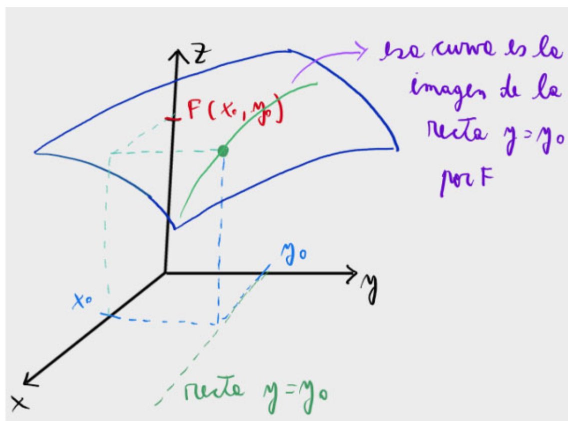
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = 0.$$

2.2. Funciones de varias variables. Dada $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$ queremos extender los conceptos anteriores.

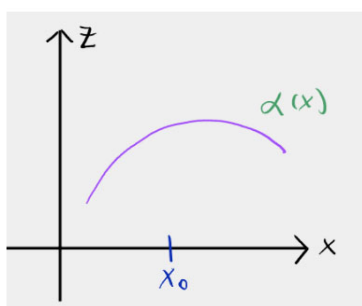
¿Qué será calcular la derivada?

¿Habrá un plano tangente con características similares a la recta tangente?

2.2.1. Derivadas parciales. Empecemos respondiendo la primera pregunta.



Puedo parametrizar la curva imagen de la recta $y = y_0$ como $\sigma(x) = (x, y_0, F(x, y_0))$.
Me pregunto ahora si la función de una variable $\alpha(x) = F(x, y_0)$ es derivable le x_0.
Esto es como mirar esa curva en el plano $y = y_0$



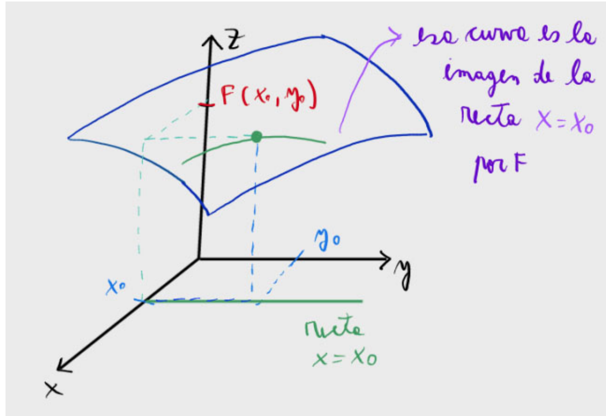
Entonces estudiamos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(x_0 + h) - \alpha(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}$$

Si este límite existe se lo llama *derivada parcial de F respecto de x en (x_0, y_0)* y se nota $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ ó $F_x(x_0, y_0)$.
Entonces, si este límite existe

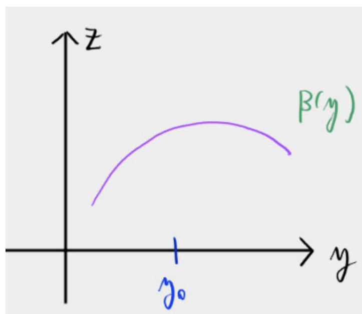
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}$$

De la misma manera, si ahora dejamos x fijo con y como variable



La curva sobre la el gráfico ahora es la imagen de la recta $x=x_0$ por F.
Puedo parametrizar esta curva como $\tilde{\sigma}(y)=(x_0, y, F(x_0, y))$

Me pregunto ahora si la función de una variable $\beta(y)=F(x_0, y)$ es derivable he y_0. Esto es como mirar esa curva en el plano $x=x_0$.



y estudiamos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\beta(y_0+h)-\beta(y_0)}{h}=\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0, y_0+h)-F(x_0, y_0)}{h}.$$

Si este límite existe se lo llama *derivada parcial de F respecto de y en (x_0, y_0)* y se nota $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ ó $F_y(x_0, y_0)$.

Entonces, si este límite existe

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)=\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0, y_0+h)-F(x_0, y_0)}{h}$$

Como estos límites son finalmente cocientes incrementales de funciones de una variable podemos usar todo la table de derivadas y las propiedades.

Ejemplo: Dada $F(x, y)=x^5 y-x^3+2 y^2$ calcular, si es posible,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,2) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,2).$$

Podemos hacer

$$\alpha(x)=F(x, 2)=x^5 \cdot 2-x^3+2 \cdot 2^2$$

y derivamos como una función de una variable en la variable x. Como es un polinomio, sabemos que se puede derivar usando las reglas de derivación:

$$\alpha'(x)=10 x^4-3 x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha'(1)=10-3=7.$$

Entonces $\frac{\partial F}{\partial x}(1,2)=7$.

Por otro lado

$$\beta(y)=F(1, y)=1^5 \cdot y-1^3+2 y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \beta'(y)=1+4 y \qquad \Rightarrow \qquad \beta'(2)=1+4 \cdot 2=9.$$

Entonces $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2)=9$.

Más generalmente podemos hacer $\frac{\partial F}{\partial x}$ en in (x, y) malquiera y después especializar en $(1,2)$.

Dada $F(x,y) = x^5 \cdot y - x^3 + 2y^2$, para hacer $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ pensamos que y es un númers fijo (como antes era $y = 2$) y derivamos $\alpha(x) = F(x,y)$ con y fijo respecto de x.

En este caso:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \alpha'(x) = 5x^4 \cdot y - 3x^2$$

luego

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,2) = 5 \cdot 1^2 \cdot 2 - 3 \cdot 1^2 = 7.$$

Lo mismo para hacer $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$. Ahora pensamos que x es un número fijo (como antes era $x = 2$) y derivamos $\beta(y) = F(x,y)$ con x fijo respecto de y. Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \beta'(y) = x^5 + 4y.$$

luego,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,2) = 1^5 + 4{,}2 = 9.$$

Ejemplo: Dada $F(x,y) = \cos\left(x^2 y\right)$ calcular $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.

En este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= -\operatorname{sen}\left(x^2 y\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right) = -\operatorname{sen}\left(x^2 y\right) \cdot 2xy \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= -\operatorname{sen}\left(x^2 y\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y\right) = -\operatorname{sen}\left(x^2 y\right) \cdot x^2
\end{aligned}$$

2.2.2. Vector gradiente. Dada una función $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tiene ambas derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$, se define el *vector gradiente* como

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)$$

Ejemplo: En los ejemplos anteriores:

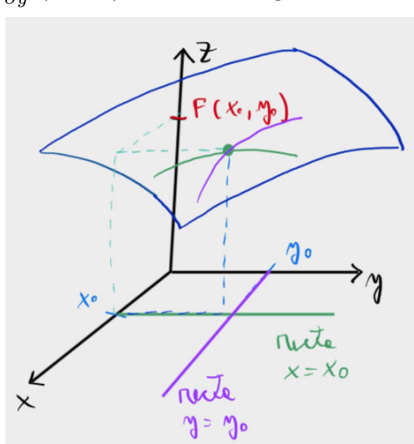
1) $F(x,y) = x^5 y - x^3 + 2y^2$, entonces

$$\nabla F(1,2) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(1,2), \frac{\partial F}{\partial y}(1,2)\right) = (7,9), \qquad \nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = \left(5x^4 y - 3x^2, x^5 + 4y\right).$$

2) $F(x,y) = \cos\left(x^2 y\right)$, entonces

$$\nabla F(x,y) = \left(-\operatorname{sen}\left(x^2 y\right) \cdot 2xy, -\operatorname{sen}\left(x^2 y\right) \cdot x^2\right)$$

2.2.3. Plano tangente y diferenciabilidad. Dada $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $(x_0, y_0) \in A$ un punto, si existen ambas derivados parciales $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$, teníamos algo así:



donde

$$\sigma(x) = (x, y_0, F(x, y_0)) \qquad \text{curva violeta}$$
$$\tilde{\sigma}(y) = (x_0, y, F(x_0, y)) \qquad \text{curva verde}$$

Como existe la derivada en $x = x_0$ de $\alpha(x) = F(x, y_0)$ que llamamos $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ tenemos

$$\sigma'(x_0) = \left(1, 0, \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$$

También existe la derivada en $y = y_0$ de $\beta(y) = F(x_0, y)$ que llamanos $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ entonces tenemos

$$\tilde{\sigma}'(y_0) = \left(0, 1, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

Observar que:
$\sigma'(x_0)$ es tangente a la curva violeta
$\tilde{\sigma}'(y_0)$ es tangente a la curva verde.
Entonces, si hacemos el producto vectorial

$$N := \sigma'(x_0) \times \tilde{\sigma}'(y_0) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

tendremos una dirección normal a la superficie.

Con esta dirección normal podemos construir un plano que pase por $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ que esperamos que sea “tangente” al gráfico of F:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - F(x_0, y_0)) = 0$$

y despejando queda

$$z = F(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}_{F_x(x_0, y_0)}(x - x_0) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}_{F_y(x_0, y_0)}(y - y_0)$$

Diremos que este plano es tangente al gráfico de la función F si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{F(x, y) - \left(F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\right)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

y en este caso diremos que F es *diferenciable* en (x_0, y_0).

Nota: Al igual que en una variable tendremos una lista de funciones diferenciables y propiedades.

Por ejemplo: los *polinomios en 2 variables* son funciones $F(x, y)$ que se escriben como suma de términos que son de la forma

$$\alpha x^n y^m, \qquad m, n \in \mathbb{N}_0$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Un polinomio de 2 variables es por ejemplo,

$$F(x, y) = 2x^2y - 3x^5y^3 + \underbrace{2x^3}_{\text{es como } 2x^3y^0} - 5y^2$$

Todos los polinomios en 2 variables son funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: Dada $F(x, y) = 3x^4y^2 - 5x^2 + y^3$ determinar si es diferenciable y calcular el plano tangente al grafico de F en $(-1, 0)$.

Solución: sabemos que F es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser un polinomio. En particular, F es diferenciable en $(-1, 0)$. Entonces podemos calcular las derivadas parciales y construir el plano tangente.

Primero calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 12x^3y^2 - 10x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(-1,0) = 10,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 6x^4y + 3y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = 3,$$

También necesitamos calcular $F(-1,0) = 5$.
Usando la ecuación del plano tangente con $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ y llegamos a que

$$\begin{aligned} z &= F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)(y - y_0) \\ &= 3 + 10(x+1) + 3y. \end{aligned}$$