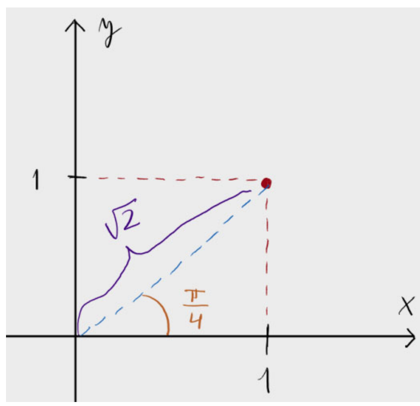
CLASE 8. CURVAS Y FUNCIONES

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Coordenadas polares

Consiste en otra forma de representar puntos en el plano de otra forma que no sea dar las coordenadas (x, y) cartesianas.



Vemos que $(1, 1)$ quede caracterizados si decimos que es el único punto del plano que:

(i) dista del $(0, 0)$ en $\sqrt{2}$;
(ii) forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el semieje positivo de las x en sentido antihorario.

(Pensar las similitudes con la forma polar de los números complejos)

De la misma forma que en complejos se tienen las relaciones entre

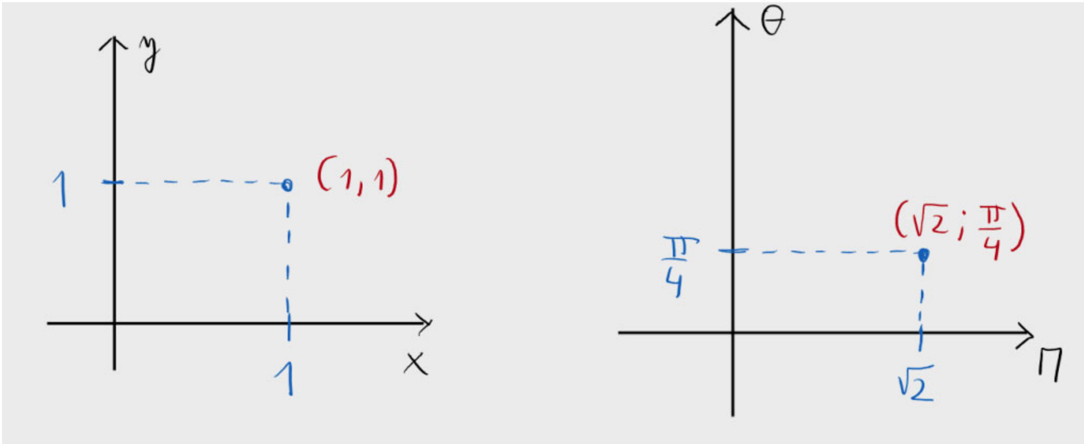
$$(x, y) \qquad \text{y} \qquad (r; \theta)$$

donde $r = \|(x, y)\| \geqslant 0$, y θ es el único ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ que satisface que

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

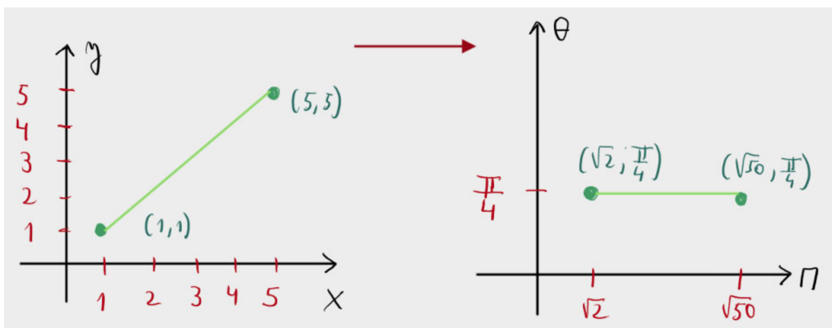
vamos a usar $(r; \theta)$ para describir el punto en coordenadas polares. (Observar que usamos el punto y coma para separar las coordenadas en polares).

Por ejemplo, $(1, 1)$ y $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ representan el mismo punto solo que $(1, 1)$ está dado en coordenadas cartesianas y $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ está dado en coordenadas polares.



Ejemplo: Si en coordenadas cartesianas damos la curva $\sigma(t) = (t,t)$, $t \in [1,5]$ veamos que es al segmento que une $(1,1)$ con $(5,5)$.

¿Cómo podemos describir ese segmento en polares?



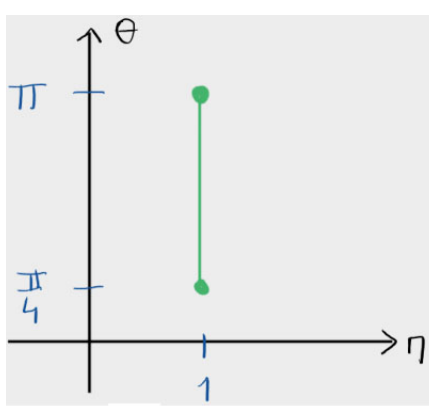
En polares vemos que son todos puntos con ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ pero el radio varia entre $r = \|(1,1)\| = \sqrt{2}$ y $r = \|(5,5)\| = \sqrt{50}$.

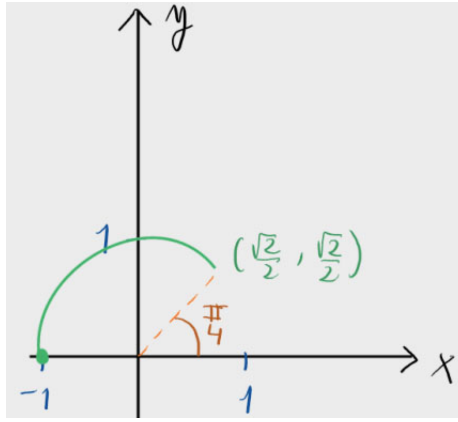
Entonces $r(t) = t$ con $t \in [\sqrt{2}, \sqrt{50}]$ y $\theta(t) = \frac{\pi}{4}$ describe esos puntos.

Entonces, en polares esa curva se represente pon

$$\alpha(t) = \left(t; \frac{\pi}{4}\right), \, t \in [\sqrt{2}, \sqrt{50}].$$

Ejemplo: Determinar una parametrización dada en coordenados cartesianas de la curva paramétrica dada en polares $\alpha(t) = (1;t)$ con $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.





¿Qué conjunto de puntos es en cartesianas?

$$x(t) = 1 \cdot \cos(t)$$
$$y(t) = 1 \cdot \operatorname{sen}(t)$$

con $t \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$. Entonces la curva en coordenadas cartesianas está dada por

$$\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [\tfrac{\pi}{4}, \pi].$$

Observación: La clase pasada vimos curvas parametrizadas

$$\mathcal{C} = \{\sigma(t), t \in I\}$$

- en $\mathbb{R}^2$, que se parametrizan como $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, y entonces podemos pensar a

$$\begin{aligned} \sigma : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

es decir, una función que toma valores reales y me devuelve puntos en $\mathbb{R}^2$.

- en $\mathbb{R}^3$, que se parametrizan como $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, y entonces podemos pensar a

$$\begin{aligned} \sigma : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

es decir, una función que toma valores reales y me devuelve puntos en $\mathbb{R}^3$.

OJO!!! Cuando miramos la curva parametrizada por $\sigma(t)$ **no** estamos mirando el gráfico de σ, ni el de x ni el de y, sino el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ (ó $\mathbb{R}^3$) que son imagen de σ, es decir, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ (ó $\mathbb{R}^3$) que *deja dibujada la trayectoria σ mientras se mueve el tiempo t en I* que está dada por

$$\mathcal{C} = \{\sigma(t), t \in I\}.$$

2. Funciones de 2 y 3 variables

En muchos problemas de la vida real uno usa varios datos para determinar algún objeto de estudio. Por ejemplo, la presión arterial promedio es función de la presión sistólica y la presión diastólica. Para un corazón en reposo se modela por

$$\mathrm{PAP}(S, D) = D + \tfrac{1}{3}(S - D).$$

En este caso, $F(x, y) = y + \frac{1}{3}(x - y)$ es una función de dos variables.

Vamos a estudiar a continuación este tipo de funciones.

Para eso repasemos algunos conceptos conocidos de funciones de una variable $f(x)$.

2.1. Funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definición: Una *función* es una ley de asignación que a cada valor x en un conjunto dado le asigna un único valor $f(x)$.

Ejemplo:

$$f : \underbrace{[0,2]}_{\text{conj. dado}} \to \mathbb{R}, \qquad \underbrace{f(x) = x^2}_{\text{ley de asignación}} \quad .$$

Al conjunto $[0,2]$ dado se lo llama *dominio de la función*.

A veces nos dan solo la ley de asignación y nos piden el *dominio natural*, que es el conjunto más grande en donde tiene sentido esa ley de asignación.

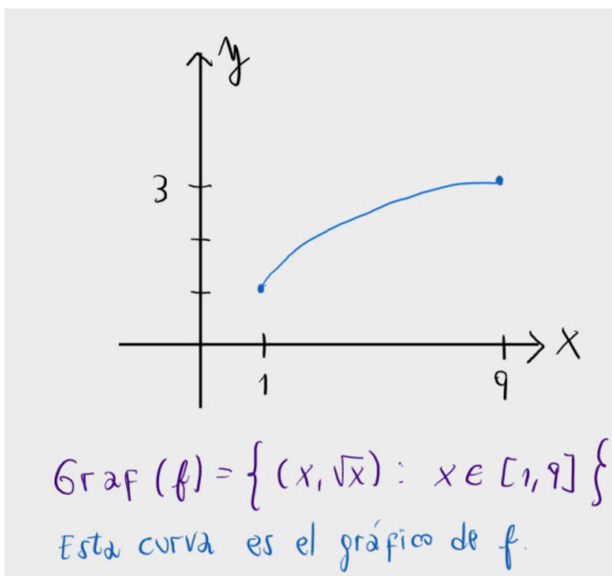
Ejemplo: Dado $f(x) = \sqrt{x}$ (ley de asignación) el *dominio natural* de esta $f(x)$ (lo llamamos $\mathrm{Dm}(f)$) es

$$\mathrm{Dm}\, f = \mathbb{R}_{\geqslant 0} = [0, +\infty).$$

Definición: Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (acá estamos diciendo que A es el dominio y f la ley), se define el *gráfico de la función* como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Graf}(f) &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in A, y = f(x)\big\} \\ &= \{(x, f(x)), \quad x \in A\}. \end{aligned}$$

Ejemplo: $f : [1,9] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$.



2.2. Funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Definición: una *función F de dos variables* es una ley de asignación que a cada (x,y) en un conjunto dado $A \subseteq \mathbb{R}^2$ le asigna un único valor $F(x,y) \in \mathbb{R}$. Se escribe $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y se denota $F(x,y)$.

Ejemplo:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = x^2 + y^2$$

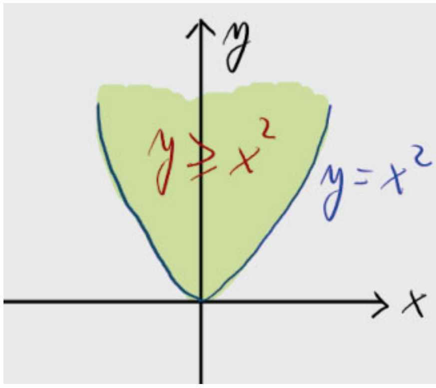
$$F : \big\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\big\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

Definición: el *Dominio natural* se define igual que antes, solo que ahora será el conjunto más grande de $\mathbb{R}^2$ donde tenga sentido la ley $F(x,y)$.

Ejemplo:

$$F(x,y) = x^2 + y^2, \quad \mathrm{Dm}\, F = \mathbb{R}^2$$
$$F(x,y) = \sqrt{y - x^2}, \quad \mathrm{Dm}\, F = \left\{(x,y) : y \geqslant x^2\right\}.$$

Gráficamente



Definición: Dada $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, se define su *gráfica* como:

$$\begin{aligned}\mathrm{Graf}(F) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ z = F(x,y)\right\} \\ &= \{(x,y,F(x,y)) : (x,y) \in A\}.\end{aligned}$$

Se definen los mismos conceptos para **funciones de 3 variables** ($F(x,y,z)$):
Dominio natural: será un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.
Grafico de F: se define como

$$\mathrm{Graf}(F) = \{(x,y,z,F(x,y,z)),\ (x,y,z) \in A\}$$

Esto no lo graficamos (su gráfico está en $\mathbb{R}^4$!!!)

3. Conjuntos de nivel

Dada $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se definen la *curvas de nivel* c de F como los conjuntos de $\mathbb{R}^2$ dedos por:

$$S_c = \{(x,y) \in A : F(x,y) = c\}.$$

Estos conjuntos serán típicamente curvas (aunque en algunos casos puedan dar “cosas raras").

Ejemplo:
(1) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = x^2 + y^2$.

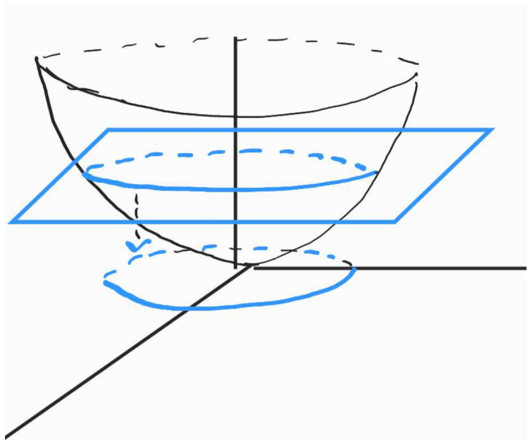
- Curva de nivel S_c con $c = -1$.
  Buscamos (x,y) : $x^2+y^2 = -1$. Como $x^2+y^2 \geq 0$ vemos que esto nunca pasa, entonces $S_{-1} = \emptyset$ (vacio).
- Curva de mirrel S_c con $c = 0$.
  Buscamos (x,y) : $x^2 + y^2 = 0$, sabemos que esto pasa si y sólo si $(x,y) = (0,0)$, entonces $S_0 = \{(0,0)\}$ (tiene un solo punto).
- Curva de nivel S_c con $c = 1$.
  Ahora buscamos (x,y) tal que $x^2 + y^2 = 1$, lo que es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, entonces $S_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$, que es una curva.

En general, convencerse que

$$\begin{aligned}&S_c = \emptyset \text{ con } c < 0\\ &S_0 = \{(0,0)\}\\ &S_c = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = c\right\}\end{aligned}$$

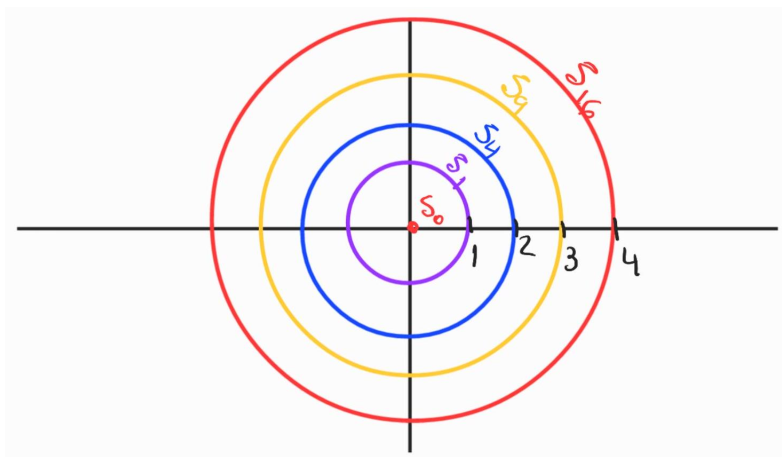
donde en el último caso, S_c es le circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{c}$.

¿Qué es gráficamente una curva de nivel? Miremos el gráfico de $F(x,y) = x^2 + y^2$ (el paraboloide)



Cada vez que corto con un plano $z = c$, veo $x^2 + y^2 = c$ en la altura c.

La curva de nivel consiste en mirar ese conjunto de puntos en el plano xy. Graficamos varias juntos:



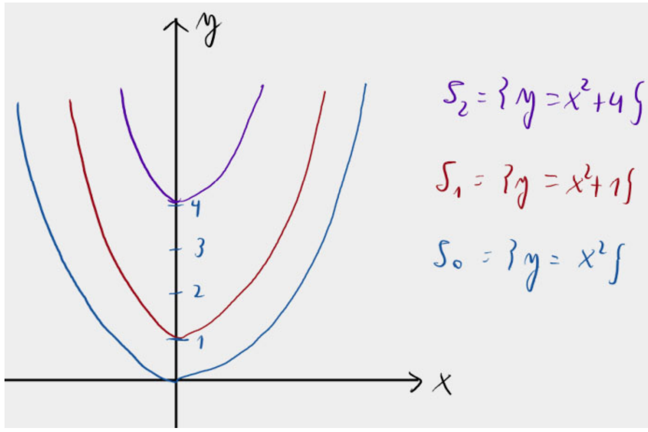
(2) $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ con $A = \{(x, y) : y \geqslant x^2\}$
En este caso:

$$S_{-1} = \left\{(x, y) \in A : \sqrt{y - x^2} = -1\right\} = \emptyset$$

porque la raíz cuadrada siempre devuelve valores no negativos.

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{(x, y) \in A : \sqrt{y - x^2} = 0\right\} \\ &= \{(x, y) \in A : \quad y - x^2 = 0\} \\ &= \{(x, y) : y = x^2\} \\ S_1 &= \left\{(x, y) \in A : \sqrt{y - x^2} = 1\right\} \\ &= \{(x, y) \in A : y - x^2 = 1\} \\ &= \{(x, y) : y = x^2 + 1\} \end{aligned}$$

Convencerse que $S_c = \emptyset$ con $c < 0$ y $S_c = \{(x, y) : y = x^2 + c^2\}$ con $c \geqslant 0$.



Sabiendo además que

$$\operatorname{Dm} F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \geqslant x^2\right\}$$

podemos darnos una idea de cómo es el gráfico de F. (Hacerlo en GeoGebra).