CLASE 7. CURVAS

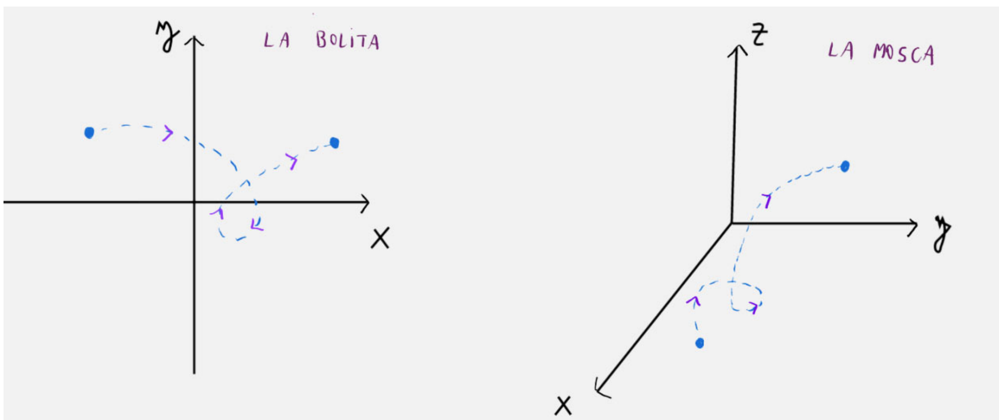
MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Curvas

¿Qué es una curva?

Intuitivamente podemos pensar una curva como el conjunto de puntos o trayectoria que deja dibujada una partícula en movimiento. Podemos pensar por ejemplo una bolita manchada de tinta moviéndose en una mesa o una mosca manchada de tinta volando por el espacio que dejan una *una estela* de tinta a medida que se mueven:

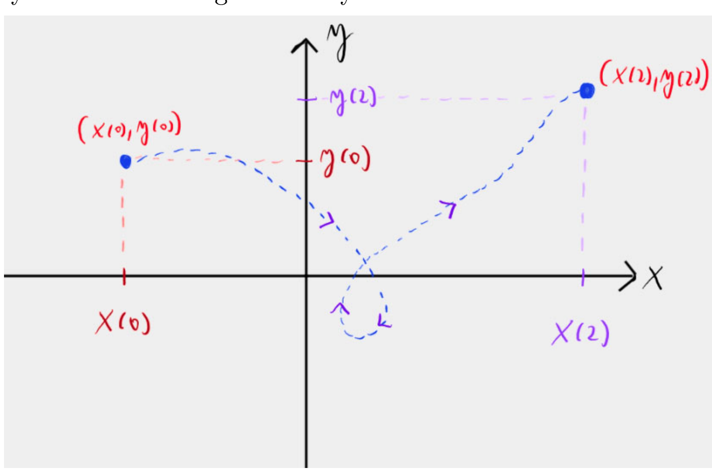


Como en algunos casos una curva en el espacio se podrá reducir a una curva en el plano, vamos a empezar a por estudiar esto.

1.1. Curvas en el plano. Si conocemos la trayectoria de una partícla en el plano, estamos diciendo que para cada instante de tiempo t (con t que puede estar en un intervalo o en todo $\mathbb{R}$) conocemos la posición de la partícula en los ejes cartesianos, es decir, conocemos $(x(t), y(t))$.

Para cada t tenemos que $(x(t), y(t))$ es un punto del plano.

Si por ejemplo $t \in [0, 2]$ y se describe la siguiente trayectoria



Definición: Decimos que una curva en el plano (también llamada *curva paramétrica*) es el conjunto de puntos

$$\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)), t \in I\}$$

con $x(t)$, $y(t)$ funciones continuas.

También se puede escribir

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in I$$

o también se usa la notación $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ y se escribe

$$\mathcal{C}\colon \{\sigma(t), t \in I\}$$

y tendremos $(x, y) = \sigma(t)$.

Ejemplo: $\sigma(t) = (2t + 4, -t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$.
Esto nos dice que la curva es

$$\mathcal{C}\colon \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = -t + 2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Nos hacemos las preguntas:

1. ¿Qué representación gráfica tiene esa curva?
2. ¿Cómo se recorre en el tiempo?
3. ¿La puedo describir como el gráfico de una función?
4. Hay otra parametrización que me de la misma curva?

Para responder 1) vamos a responder también 3), y tratamos de ver si podemos ver que relación hay entre las coordenadas cartesianas x e y.

Despejamos t de la primera ecuación

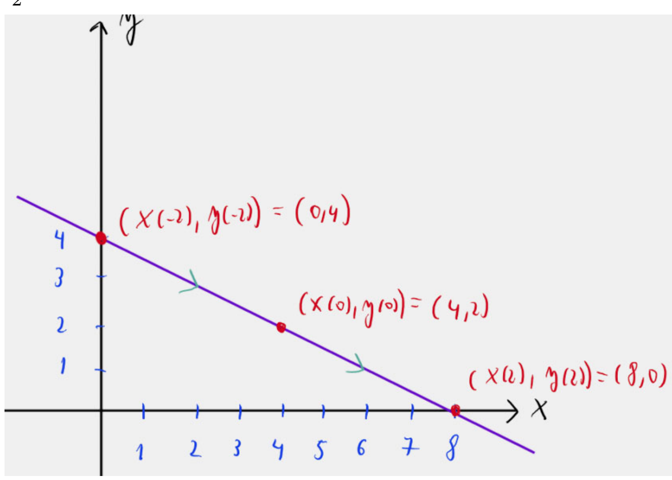
$$x = 2t + 4 \Rightarrow t = \frac{x - 4}{2}$$

y reemplazamos en la segunda ecuación

$$y = -t + 2 = -\left(\frac{x - 4}{2}\right) + 2 = -\frac{x}{2} + 4.$$

Entonces, vemos que los $(x(t), y(t))$ de la curva satisfacen la ecuación dela recta $y = -\frac{x}{2} + 4$.

Además, como t se mueve en todos los reales ($t \in \mathbb{R}$), $x(t) = 2t + 4$ también recorre *todos los reales*, entonces, la curva es toda la recta $y = -\frac{x}{2} + 4$



Ubiquemos algunos valores $(x(t), y(t))$ en el gráfico.

Si $t = -2$

$$x(-2) = 2(-2) + 4 = 0$$
$$y(-2) = -(-2) + 2 = 4$$

Si $t = -1$

$$x(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = 2$$
$$y(-1) = -(-1) + 2 = 3$$

si $t = 0$

$$x(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$$
$$y(0) = -0 + 2 = 2$$

Si $t = 2$

$$x(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$$
$$y(2) = -2 + 2 = 0.$$

Entonces, vemos que si el tiempo se mueve hacia adelante, la trayectoria se mueve en el sentido de la flecha $\rightarrow$ que está un gráfico.

Con todo esto respondimos

1) $\mathcal{C}$ es la recta $y = -\frac{x}{2} + 4$ con $x \in \mathbb{R}$.
2) Se recorre como según el gráfico.
3) Es la gráfica de una función ya que $\mathcal{C} = \{(x, y) : y = \underbrace{-\frac{x}{2} + 4}_{f(x)}\}$.

Falta responder 4). Teníamos

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = -t + 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Si cambiamos t por ejemplo por $2t$ tendremos

$$\widetilde{\mathcal{C}} : \begin{cases} x = 2 \cdot (2t) + 4 = \overbrace{4t + 4}^{\tilde{x}(t)} \\ y = -(2t) + 2 = \underbrace{-2t + 2}_{\tilde{y}(t)}. \end{cases}$$

Convencerse que esta curva $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ es la misma que antes solo que *se recorre más rápido*, ya que mientras t se mueve en $[0, 1]$, tendremos que $(x(t), y(t))$ se mueve entre

$$(4, 2) = (x(0), y(0)) \quad \text{y} \quad (6, 1) = (x(1), y(1))$$

sobre la recta, mientras que $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ se mueve entre

$$(4, 2) = (\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) \quad \text{y} \quad (8, 0) = (\tilde{x}(1), \tilde{y}(1)).$$

De esta manera construimos con $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ otra parametrización de la misma curva $\mathcal{C}$.

Recordar cómo se hacía en el CBC: Dada $\sigma(t) = (2t + 4, -t + 2) = (2t, -t) + (4, 2) = t \cdot \underbrace{(2, -1)}_{\substack{\text{direc. de} \\ \text{la recta}}} + \underbrace{(4, 2)}_{\substack{\text{punto} \\ \text{de paso}}}$

Ejemplo: Consideramos la curva dada por

$$\sigma(t) = \left(t^2 - 2t, t + 1\right), \ t \in [-2, 3].$$

Queremos responder las preguntes 1) 2) 3) de antes.

$$x = t^2 - 2t$$
$$y = t + 1$$

Como hicimos antes, tratamos de despejar t de una de los ecuaciones y meter ese despeje en la otra.
De la segunda ecuación despejamos $t = y - 1$ entoncesde la primera ecuación

$$x = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 \quad \Rightarrow \quad x = y^2 - 4y + 3.$$

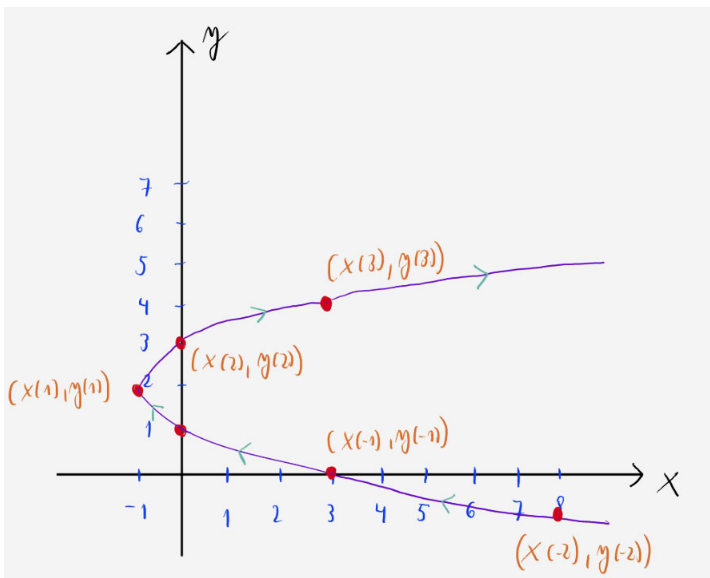
Vemos que x como función de y es una parábola.

Ponemos algunos puntos

$$\begin{array}{ll}
t=-2 & x(-2)=(-2)^2-2(-2)=8 \\
 & y(-2)=-2+1=-1 \\
t=-1 & x(-1)=(-1)^2-2(-1)=3 \\
 & y(-1)=-1+1=0 \\
t=0 & x(0)=0^2-2\cdot 0=0 \\
 & y(0)=0+1=1 \\
t=1 & x(1)=1^2-2\cdot 1=-1 \\
 & y(1)=1+1=2 \\
t=2 & x(2)=2^2-2{,}2=0 \\
 & y(2)=2+1=3 \\
t=3 & x(3)=3^2-2{,}3=3 \\
 & y(3)=3+1=4
\end{array}$$

Además, como $x=y^2-4y+3=(y-1)(y-3)$ vemos que el vértice es $y=\frac{1+3}{2}=2$ cuando $x=-1$.

Juntando todo lo anterior:



Además vemos que si bien la curva $\mathcal{C}$ no es el gráfico de una función $y=f(x)$ pero si es el gráfico de una función $x=g(y)$ ya que teníamos $x=y^2-4y+3$.

También podemos ver que la curva *no es todo* el gráfica de esa función $x=y^2-4y+3$ sino solo una parte con $y\in[-1,4]$.

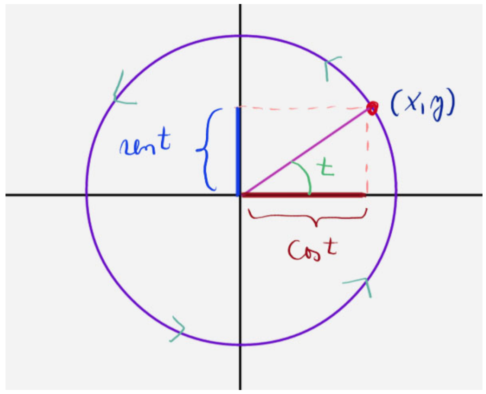
Ejemplo: Consideramos la curva dada por

$$\sigma(t)=(\cos t,\sin t),\ t\in[0,2\pi].$$

Vemos en este caso que no es claro cómo despejar t. Sin embargo, podemos ver que

$$x=\cos t,\quad y=\sin t$$

satisface que $x^2+y^2=(\cos t)^2+(\sin t)^2=1$. Entonces los puntos de esta trayectoria están en la circunferencia de centro 0 radio 1. Además, cualquier punto de la circunferencia de centro 0 y radio 1, es decir, un (x,y) tal que $x^2+y^2=1$, por la definición de $\cos t$ y $\sin t$ en la circunferencia trigonométrica, satisface que existe un $t\in[0,2\pi)$ (t radianes) tal que $x=\cos t$, $y=\sin t$:



Esto nos dice que

$$\mathcal{C} = \{(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Por otro lado, si ahora me dan un conjunto de puntos del plano A, queremos ver si podemos encontrar una parametrización $(x(t), y(t))$ de manera que la curva que define esa parametrización sea A, es decir

$$A = \{(x(t), y(t)), t \in I\}.$$

Ejemplo: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\right\}$.

Sabemos que A es una parábola parábola. Al conjunto $(x, y) : y = x^2 + 1$ se lo puede escribir como $\left(x, x^2 + 1\right)$ y ahí ya tenemos la parametrización, solo que escrita con la variable x en lugar de t.

Podemos proponer la parametrización

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Es decir, $\sigma(t) = \left(t, t^2 + 1\right), t \in \mathbb{R}$.

En general, si me dan:

1) $A = \{(x, f(x)), x \in I\}$ siempre sirve la parametrización

$$\begin{cases} x = t, \quad t \in I \\ y = f(t), \end{cases}$$

es decir, $\sigma(t) = (t, f(t))$, $t \in I$.

2) $A = \{(g(y), y), y \in I\}$ siempre sirve le parametrización

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = t \end{cases}, \quad t \in I$$

es decir, $\sigma(t) = (g(t), t)$, $t \in I$.

3) $A = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\right\}$ ya vimos que sirve

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in I$$

es decir, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$.

2. Dominio de una curva paramétrica

Ejemplo: consideramos la curva

$$\sigma(t) = \left(\frac{1}{t}, \sqrt{t}, t^2 + 1\right).$$

¿Para qué valores de $t \in \mathbb{R}$ tiene sentido hacer $\sigma(t)$?

En este coso escribimos $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y entonces

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = \sqrt{t} \quad z(t) = t^2 + 1,$$

y cada una es una función continua que tendrá un dominio natural:

$$\operatorname{Dom} x(t) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$\operatorname{Dom} y(t) = [0, +\infty)$$
$$\operatorname{Dom} z(t) = \mathbb{R}$$

Entonces $\operatorname{Dom} \sigma(t)$, donde tendrá sentido hacer $\sigma(t)$, deberá ser el conjunto donde tenga sentido hacer cada coordenada $x(t), y(t), z(t)$, y que es

$$\{\mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cap [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = (0, +\infty)$$

es decir, es le intersección de los dominios de $x(t), y(t), z(t)$.

3. Velocidad y aceleración de una curva paramétrica

Dada una parametrización $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$, si cada coordenada es derivable en t_0 se define $\sigma'(t_0)$ como sigue:
En $\mathbb{R}^2$, si $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ entonces

$$\sigma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

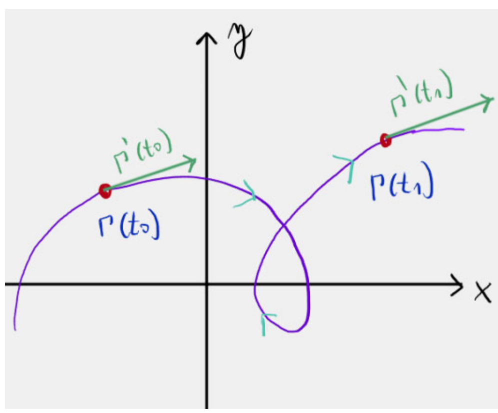
En $\mathbb{R}^3$, si $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entonces

$$\sigma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

A este vector, se lo llama *vector velocidad* de σ en t_0.

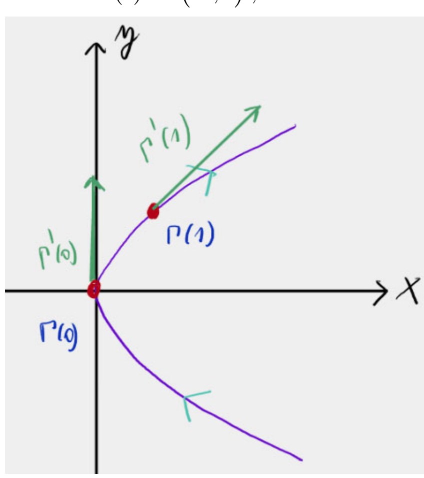
De le misma manera, si cada coordenada de σ es dos veces derivable en t_0, se define:
En $\mathbb{R}^2$, $\sigma''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0))$.
En $\mathbb{R}^3$, $\sigma''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0))$.
A este vector se lo llama *vector aceleración* de σ en t_0.

Vale que:
Si $\sigma'(t_0) \neq 0, \sigma'(t_0)$ es tangente a σ en t_0:



Ejemplo: Consideramos la curva

$$\sigma(t) = (t^2, t), \ t \in \mathbb{R}.$$



En este caso tenemos

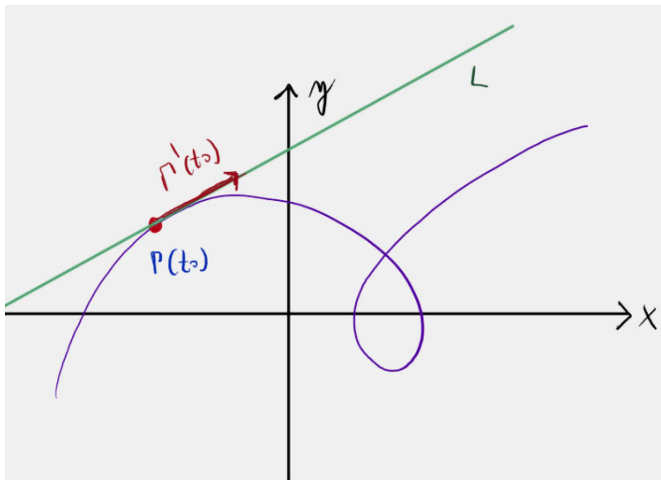
$$\begin{aligned} &\sigma'(t) = (2t, 1) \\ &\sigma(0) = (0,0), \quad \sigma'(0) = (0,1) \\ &\sigma(1) = (1,1), \quad \sigma'(1) = (2,1) \end{aligned}$$

4. Recta tangente a una curva

Dada una parametrización $\sigma(t)$, si σ es derivable en t_0 (es decir, cada coordenada es derivable), y $\sigma'(t_0) \neq 0$, sabemos que $\sigma'(t_0)$ es tangente a la curva en $\sigma(t_0)$, entonces

$$L: \quad \sigma(t_0) + s\sigma'(t_0), \ s \in \mathbb{R}$$

es la recta tangente a la curva.



Ejemplo: Dada le curva

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) : y = x^2 + 1\right\}$$

consideramos $\sigma(t) = \left(t, t^2+1\right)$ como una parametrización.

Queremos calcular la recta tangente en $(2,5)$.

Vemos que $(2,5) = \sigma(t) = \left(t, t^2+1\right)$. Si $t = 2 \Rightarrow \sigma(2) = (2,5)$. Además $\sigma'(t) = (1, 2t)$, entonces $\sigma'(2) = (1,4)$. Entonces $L: \sigma(2) + s\sigma'(2) = (2,5) + s(1,4)$, $s \in \mathbb{R}$, es la recta tangente buscada.

Ejercicio: Considerar $\sigma(t) = \left(2t, 4t^2+1\right)$. Ver que $\sigma(1) = (2,5)$, $\sigma'(1) = (2,8)$ y que $L: (2,5) + s(2,8)$, $s \in \mathbb{R}$, es la misma recte que antes.

En general vale que la recta tangente es independiente de lo parametrización de $\mathcal{C}$ que usemos.